

SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE



THÉORIE

DES

FONCTIONS ALGÉBRIQUES

DE

DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES.

THÉORIE

DES

FONCTIONS ALGÉBRIQUES

DE

DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES,

PAR

ÉMILE PICARD,
MEMBRE DE L'INSTITUT, PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE PARIS,

ET

GEORGES SIMART,
CAPITAINE DE FRÉGATE, RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TOME I.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1897

INTRODUCTION.

J'avais, depuis longtemps, l'intention de reprendre mes anciennes recherches sur les fonctions algébriques de deux variables et de les présenter sous une forme plus didactique en les précisant et les complétant autant qu'il me serait possible : c'est ce que je me proposais de faire dans un Mémoire de quelque étendue. Je n'ai pas tardé à reconnaître qu'il était indispensable, pour la clarté, de reprendre en même temps les travaux classiques de M. Noether, qui sont fondamentaux dans cette théorie, et le travail projeté devenait ainsi une sorte de Traité sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables. Mais, dans ces dernières années, ces questions ont fait l'objet d'un si grand nombre de recherches, surtout en Italie, qu'il était impossible de les passer sous silence, et je craignais, d'autre part, de m'engager seul dans un domaine très étendu où seraient nécessaires des recherches bibliographiques et la lecture de nombreux Mémoires. Mon ami, M. Simart, qui m'a déjà rendu de grands services dans la publication de mon *Traité d'Analyse*, ayant bien voulu me promettre son concours, a levé mes hésitations. J'ai traité cet hiver dans mon cours de la Théorie des surfaces algébriques, et nous avons, M. Simart et moi, rassemblé ces Leçons dans le Tome premier, que nous publions aujourd'hui.

On pensera, peut-être, que notre tentative est prématurée, et que la Théorie des fonctions algébriques de plusieurs va-

riables présente encore trop de lacunes pour pouvoir faire l'objet d'une exposition d'ensemble. Nous n'avons certes pas la prétention d'approfondir toutes les questions qui se posent dans cette théorie difficile ; notre seul but est de donner une idée de l'état actuel de la Science sur un sujet dont l'étude mérite de tenter l'effort de nombreux chercheurs.

Nous nous sommes, dans ce Volume, étendus assez longuement, au début, sur diverses questions préliminaires concernant les intégrales multiples et la Géométrie de situation. Nous traitons ensuite de la connexion dans les surfaces algébriques et des intégrales de différentielles totales. Les deux derniers Chapitres sont consacrés à l'étude des nombres invariants introduits par Clebsch et Noether, et aux intégrales doubles qui s'y rattachent.

Nous nous proposons, dans le Tome II, de compléter divers points qui n'ont été qu'effleurés dans le présent Volume, et de faire des applications à quelques questions de Calcul intégral ; nous espérons aussi faire connaître les principaux résultats obtenus dans ces derniers temps par MM. Castelnuovo et Enriques, résultats qui ont renouvelé toute une partie de la Théorie des surfaces.

ÉMILE PICARD.

Paris, le 1er juin 1897.

THÉORIE

DES

FONCTIONS ALGÉBRIQUES

DE

DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES.

CHAPITRE I.

DES INTÉGRALES MULTIPLES DE FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

I. — Des intégrales simples et des intégrales multiples d'ordre $n-1$ dans l'espace à n dimensions.

1. On sait ce que l'on doit entendre par intégrale multiple d'ordre n dans l'espace à n dimensions. Nous nous proposons de définir les intégrales multiples, dont l'ordre m est inférieur à celui n des dimensions, et de chercher les conditions d'intégrabilité de ces intégrales.

Nous nous occuperons tout d'abord des deux cas extrêmes, relatifs à $m=1$ et $m=n-1$, ce qui nous permettra d'aborder plus facilement l'étude des cas intermédiaires.

2. Quoique le cas de $m=1$ soit bien élémentaire, reprenons-le pour être complet; soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n variables réelles que l'on considère comme les coordonnées d'un *point* dans l'es-

pace E_n à n dimensions. Considérons l'intégrale

$$(1) \qquad \int_A^B P_1\,dx_1 + P_2\,dx_2 + \ldots + P_n\,dx_n,$$

dans laquelle $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont des fonctions bien déterminées et continues de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et où A et B désignent deux points, dans l'espace E_n, dont les coordonnées sont respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

Cette intégrale n'aura de sens que lorsque nous aurons fixé le *chemin d'intégration,* c'est-à-dire une courbe C, ou variété à *une* dimension, joignant le point A au point B. Soient

$$x_1 = \varphi_1(\lambda), \qquad x_2 = \varphi_2(\lambda), \qquad \ldots, \qquad x_n = \varphi_n(\lambda),$$

les coordonnées d'un point quelconque de la courbe C exprimées en fonction d'un paramètre λ : les fonctions φ sont des fonctions continues de λ, et quand λ variera d'une manière continue de λ_0 à λ_1, le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ décrira la courbe C. L'intégrale (1), prise le long de C, est alors, par définition, l'intégrale simple ordinaire

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left(P_1 \frac{dx_1}{d\lambda} + P_2 \frac{dx_2}{d\lambda} + \ldots + P_n \frac{dx_n}{d\lambda} \right) d\lambda.$$

C'est la généralisation de l'*intégrale curviligne,* dans les espaces à deux et trois dimensions. On peut, comme dans ces cas, envisager un *contour d'intégration fermé,* dans lequel le point d'arrivée coïncide avec le point de départ, et il y a lieu de remarquer que cette intégration peut être effectuée dans deux sens opposés.

3. Nous devons nous poser pour l'intégrale (1) une question analogue à celle qui a été étudiée pour les intégrales curvilignes ordinaires : *A quelles conditions l'intégrale* (1) *ne dépendra-t-elle que de ses limites?*

Envisageons dans l'espace E_n un domaine continu D, simplement connexe, à l'intérieur duquel les fonctions $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont uniformes, continues, ainsi que leurs dérivées partielles. Les courbes, joignant les deux points A et B, que nous aurons à considérer, appartiennent tout entières à ce domaine et peuvent

être ramenées l'une à l'autre par une déformation continue sans en sortir.

Nous cherchons donc les conditions *nécessaires* et *suffisantes* auxquelles doivent satisfaire les fonctions P, dans le domaine D, pour que la valeur de l'intégrale (1) soit indépendante de la trajectoire suivie par le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ entre les points A et B et dépende uniquement des coordonnées du point A et de celles du point B.

Les *conditions nécessaires* s'obtiennent immédiatement, en supposant d'abord qu'on ne fasse varier que *deux* des coordonnées, x_h et x_k, par exemple. L'intégrale (1) se réduit alors à l'intégrale curviligne ordinaire

$$\int P_h dx_h + P_k dx_k.$$

Les conditions d'intégrabilité sont

$$\frac{\partial P_h}{\partial x_k} = \frac{\partial P_k}{\partial x_h}. \tag{2}$$

En considérant toutes les combinaisons différentes de n lettres deux à deux, on obtient ainsi $\frac{n(n-1)}{2}$ *conditions d'intégrabilité* nécessaires.

4. Ces conditions sont aussi *suffisantes*. Pour le montrer, introduisons un paramètre variable ε, et envisageons la courbe variable définie par les équations

$$x_1 = \varphi_1(\lambda, \varepsilon), \qquad x_2 = \varphi_2(\lambda, \varepsilon), \qquad \ldots, \qquad x_n = \varphi_n(\lambda, \varepsilon).$$

Les fonctions φ sont supposées indépendantes de ε, quand on y fait $\lambda = \lambda_0$ et $\lambda = \lambda_1$: pour $\lambda = \lambda_0$ elles se réduisent respectivement à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ coordonnées du point A, et pour $\lambda = \lambda_1$ à $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ coordonnées du point B.

Faisons varier à la fois λ et ε, l'intégrale (1) prendra la forme

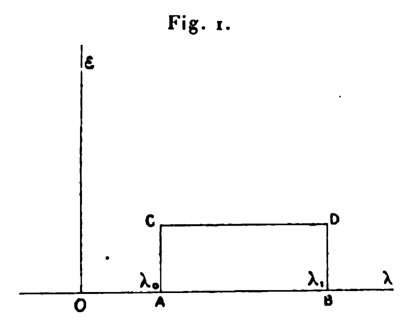
$$\left\{\begin{aligned} \int \sum P_i dx_i &= \int \sum P_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon} d\varepsilon\right) \\ &= \int \left(\sum P_i \frac{\partial x_i}{\partial \lambda}\right) d\lambda + \left(\sum P_i \frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon}\right) d\varepsilon. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

C'est une intégrale curviligne ordinaire relative aux deux variables λ et ε, et un calcul très simple montre de suite que, si les relations (2) sont satisfaites, les coefficients de $d\lambda$ et de $d\varepsilon$ satisfont à la condition d'intégrabilité

$$(4) \qquad \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\sum P_i \frac{\partial x_i}{\partial\lambda}\right) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sum P_i \frac{\partial x_i}{\partial\varepsilon}\right).$$

On en conclut que l'intégrale (3), effectuée le long d'un contour fermé tracé dans le plan des (λ, ε), est nulle si, à l'intérieur de ce contour, la condition (4) est satisfaite, les fonctions P étant toujours telles que nous l'avons supposé.

Fig. 1.



Prenons comme contour d'intégration le rectangle ABCD, défini par les segments $OA = \lambda_0$, $OB = \lambda_1$, $AC = BD = \varepsilon$. On aura, sans qu'il soit besoin d'écrire l'élément différentiel sous le signe somme, la relation

$$\int_A^B + \int_B^D + \int_D^C + \int_C^A = 0.$$

Or l'intégrale effectuée le long de BD se réduit à

$$\int_B^D \sum P_i \frac{\partial x_i}{\partial\varepsilon}\, d\varepsilon,$$

puisque, le long de cette ligne, la valeur de λ est constante. D'ailleurs, pour $\lambda = \lambda_1$ les fonctions φ sont, par hypothèse, indépendantes de ε; donc cette intégrale est identiquement nulle. Il en est de même de l'intégrale prise le long de CA. Nous concluons

de là que

$$\int_A^B = \int_C^D,$$

c'est-à-dire que l'intégrale (1) ne change pas de valeur quand on déforme le contour d'intégration, sous les conditions spécifiées.

Par conséquent, les relations (2) sont bien les conditions nécessaires et suffisantes d'intégration.

Le résultat précédent donne lieu aux conclusions suivantes :

Si la courbe C, fermée et continue, peut en se déformant se réduire à un point sans sortir d'un domaine D linéairement connexe à l'intérieur duquel les fonctions $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont uniformes, continues, ainsi que leurs dérivées partielles, l'intégrale prise le long de ce contour sera certainement nulle.

Nous verrons, dans le Chapitre suivant, ce qu'on doit entendre par un domaine à connexion multiple dans l'espace E_n, mais, sans aborder cette question, on conçoit, par analogie à ce qui a lieu dans l'espace ordinaire, qu'un domaine D, continu, satisfaisant aux conditions précédentes, soit tel que toute courbe fermée lui appartenant ne puisse se réduire à un point. L'intégrale prise le long d'un contour fermé appartenant à ce domaine devra alors nécessairement se réduire à des multiples d'un certain nombre d'entre elles qui seront les *périodes* de l'intégrale considérée.

5. Passons maintenant aux intégrales multiples d'ordre $n-1$ dans l'espace à n dimensions. Quelques remarques préliminaires sont nécessaires, relatives aux *variétés* ou surfaces à $n-1$ dimensions dans l'espace à n dimensions.

Considérons l'équation

$$(5) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

où F désigne une fonction uniforme, continue, dont toutes les dérivées partielles sont aussi continues et ne s'annulent jamais toutes à la fois sur F. L'ensemble des points de l'espace E_n, qui satisfont à cette relation, forme une *variété* à $n-1$ dimensions, V, ou hypersurface. Cette variété est *continue* si l'on peut toujours réunir, par une courbe continue entièrement tracée sur elle, deux

points arbitraires de cette variété. Elle est *finie,* si tous ses points satisfont à la condition

$$(6) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < R^2,$$

R étant une constante fixe, suffisamment grande.

Nous dirons que la variété V, définie par la seule équation (5), est *fermée* si elle est finie et continue.

Dans ce qui suit, nous supposerons en outre que cette variété est convexe, c'est-à-dire qu'une parallèle à l'un quelconque des axes de coordonnées qui rencontre cette variété la rencontre en deux points et en deux points seulement. Enfin, comme dernière hypothèse, nous admettrons qu'il n'existe, sur la variété V, aucune relation identique entre deux quelconques ou plusieurs des dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}$.

Comme exemple d'une variété satisfaisant à toutes ces conditions, on peut citer l'hypersphère

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = R^2.$$

Cela posé, on voit que la variété V divisera l'espace E_n en deux régions, l'une déterminée par l'inégalité $F < 0$, et l'autre par l'inégalité $F > 0$, sans qu'il soit possible de passer d'un point de l'une à un point de l'autre sans traverser la surface. Nous désignerons sous le nom de *région intérieure* celle de ces régions dont tous les points satisfont en outre à l'inégalité (6) et l'on peut toujours disposer de F de manière que ce soit celle qui correspondent à l'inégalité $F < 0$. L'inégalité $F > 0$ définit alors *la région des points extérieurs.*

6. Maintenant, par analogie avec les surfaces dans l'espace ordinaire, nous considérerons les dérivées partielles

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial x_n}$$

comme les paramètres d'une normale à la variété V, et nous allons démontrer qu'on peut toujours trouver sur cette variété une région pour laquelle toutes ces dérivées partielles aient le même signe. Envisageons la droite parallèle à l'axe des x_1, dont

les équations sont

$$(7) \qquad x_2 = a_2, \qquad x_3 = a_3, \qquad x_n = a_n,$$

et dont on obtient tous les points en faisant varier x_1 de $-\infty$ à $+\infty$. Soit alors B le premier point de rencontre de cette droite avec la surface et A le second. La fonction F, qui s'annule en A et B, est positive lorsque x varie de $-\infty$ au point A, négative entre le point A et le point B, positive du point B à $+\infty$. On en conclut qu'au point B, ou point d'entrée, $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ est négatif, et qu'au point A, ou point de sortie, $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ est positif.

Si donc on considère l'ensemble de toutes les droites (7) qui rencontrent la surface, elles diviseront cette surface en deux régions : l'une pour laquelle on aura $\frac{\partial F}{\partial x_1} > 0$, l'autre pour laquelle $\frac{\partial F}{\partial x_1} < 0$.

Envisageons de même l'ensemble des droites parallèles à l'axe des x_2 qui coupent la surface, elles la partageront en deux nouvelles régions correspondantes à $\frac{\partial F}{\partial x_2} > 0$ et à $\frac{\partial F}{\partial x_2} < 0$. Ces régions ne se confondent pas avec les précédentes puisqu'il n'existe pas, par hypothèse, sur V, de relation identique entre les dérivées $\frac{\partial F}{\partial x_1}$, $\frac{\partial F}{\partial x_2}$. On peut donc séparer sur la variété V une région pour laquelle on ait à la fois $\frac{\partial F}{\partial x_1} > 0$ et $\frac{\partial F}{\partial x_2} > 0$. Nous considérerons ensuite l'ensemble des droites parallèles à l'axe des x_3, et en continuant ainsi de proche, nous arriverons à séparer sur la variété V une région I pour laquelle toutes les dérivées partielles sont positives.

7. Au lieu de l'équation (5), qui définit la variété V, on peut considérer l'ensemble des équations équivalentes

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = f_1(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}), \\ x_2 = f_2(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = f_n(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}), \end{array} \right.$$

où $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ sont à considérer comme $n-1$ variables indépendantes.

On en déduit les relations

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_1}}{\dfrac{D(x_2, x_3, \ldots, x_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})}} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_2}}{\pm\dfrac{D(x_3, x_4, \ldots, x_n, x_1)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})}}$$

$$= \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_3}}{\pm\dfrac{D(x_4, \ldots, x_1, x_2)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})}} = \ldots = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_n}}{\pm\dfrac{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})}{D(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})}},$$

dans lesquelles, *pour l'ordre des indices adopté,* on devra affecter du signe + tous les déterminants fonctionnels si n est impair, et prendre alternativement le signe — et le signe +, si n est pair.

Choisissons l'ordre des u de manière que, sur la région I de V, considérée plus haut, pour laquelle toutes les dérivées $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ sont positives, cette suite de rapports soit positive. Si l'on effectue alors une permutation sur les u, le signe changera ou ne changera pas suivant la nature de cette permutation. Par analogie avec ce qui a lieu pour les surfaces dans l'espace à trois dimensions, nous distinguerons, sur la variété V, deux côtés déterminés par l'ordre dans lequel les lettres $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ sont écrites, un côté extérieur correspondant à un ordre tel que, dans la région I, tous les déterminants fonctionnels précédents affectés de leur signe soient positifs, et un côté intérieur correspondant à un ordre tel que ces déterminants soient négatifs.

On exprime encore ce fait en disant que si, dans les équations (8), deux variables u sont permutées, elles représentent V ou une variété *opposée* à V.

8. Ces préliminaires étant posés, pour arriver à la notion d'une intégrale multiple d'ordre $n-1$ dans l'espace à n dimensions, nous partirons, si n est impair, de l'intégrale

$$(9) \qquad \int\int_{(n)} \cdots \int\left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial S}{\partial x_n}\right) dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

où toutes les dérivées partielles sont affectées du signe +, en

étendant cette intégrale au domaine des points intérieurs défini par $F < 0$ dans l'espace E_n; et dans ce domaine on suppose, bien entendu, que les fonctions P, Q, ..., S et leurs dérivées partielles sont uniformes et continues.

Si n est pair, nous envisagerons l'intégrale analogue

$$(9)' \qquad \int\int_{(n)} \cdots \int \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} - \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \ldots - \frac{\partial S}{\partial x_n} \right) dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

mais dans laquelle les dérivées partielles sont affectées alternativement du signe + et du signe —.

Considérons le premier terme de l'une ou de l'autre de ces intégrales

$$(10) \qquad \int\int_{(n)} \cdots \int \frac{\partial P}{\partial x_1} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

On peut effectuer l'intégration par rapport à x_1, et, en désignant respectivement par B et A les points d'entrée et de sortie d'une parallèle à l'axe des x_1, l'intégrale précédente se réduira à l'intégrale d'ordre $n - 1$

$$\int\int_{(n-1)} \cdots \int dx_2\, dx_3 \ldots dx_n (P_A - P_B).$$

Tous les points A appartiennent à la région des points de la variété V pour laquelle $\frac{\partial F}{\partial x_1} > 0$; tous les points B à la région pour laquelle $\frac{\partial F}{\partial x_1} < 0$.

Introduisant les variables indépendantes $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, choisies dans un ordre qui corresponde au côté extérieur de V, on aura pour les points A

$$dx_2\, dx_3 \ldots dx_n = \frac{D(x_2, \ldots, x_n)}{D(u_1, \ldots, u_{n-1})} du_1 \ldots du_{n-1}$$

et pour les points B

$$dx_2\, dx_3 \ldots dx_n = - \frac{D(x_2, \ldots, x_n)}{D(u_1, \ldots, u_{n-1})} du_1 \ldots du_{n-1},$$

de sorte que l'intégrale (10) sera égale à l'intégrale d'ordre $(n - 1)$

$$\int\int_{(n-1)} \cdots \int P \frac{D(x_2, x_3, \ldots, x_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})} du_1\, du_2 \ldots du_{n-1},$$

étendue au côté extérieur de la variété V définie par l'équation $F = 0$.

Le même mode de raisonnement montre, en s'appuyant pour les signes sur le lemme du paragraphe précédent, que l'intégrale

$$\int\int_{(n)}\cdots\int \pm \frac{\partial Q}{\partial x_2} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

est égale à l'intégrale d'ordre $n - 1$

$$\int\int_{(n-1)}\cdots\int Q \frac{D(x_3, x_4, \ldots, x_n, x_1)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})} du_1\, du_2 \ldots du_{n-1},$$

étendue comme la première au côté extérieur de la variété V; et de même pour tous les autres termes de l'intégrale (9).

Finalement nous pourrons écrire l'égalité

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\int_{(n)}\cdots\int\left(\frac{\partial P}{\partial x_1} \pm \frac{\partial Q}{\partial x_2} \pm \ldots \pm \frac{\partial S}{\partial x_n}\right) dx_1 \ldots dx_n \\ &= \int\int_{(n-1)}\cdots\int\left[P \frac{D(x_2, x_3, \ldots, x_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})}\right. \\ &\qquad + Q \frac{D(x_3, \ldots, x_n, x_1)}{D(u_1, \ldots, u_{n-1})} + \ldots \\ &\qquad \left. + S \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})}{D(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})}\right] du_1 \ldots du_{n-1}, \end{aligned}\right.$$

l'intégrale d'ordre n étant étendue au domaine défini par $F < 0$, et l'intégrale d'ordre $n - 1$ au côté extérieur de la variété $V (F = 0)$.

On représente symboliquement l'intégrale d'ordre $(n - 1)$, écrite dans le second membre de cette égalité, par l'expression

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\int_{(n-1)}\cdots\int P\, dx_2\, dx_3 \ldots dx_n \\ &\quad + Q\, dx_3\, dx_4 \ldots dx_n\, dx_1 + \ldots + S\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}, \end{aligned}\right.$$

dans laquelle l'ordre des indices des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ne doit pas être interverti; c'est-à-dire que, *par définition*, cette intégrale est égale à l'intégrale

$$\begin{aligned} &\int\int_{(n-1)}\cdots\int\left[P \frac{D(x_2, x_3, \ldots, x_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})}\right. \\ &\qquad + Q \frac{D(x_3, \ldots, x_n, x_1)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})} + \ldots \\ &\qquad \left. + S \frac{D(x_1, \ldots, x_{n-1})}{D(u_1, \ldots, u_{n-1})}\right] du_1 \ldots du_{n-1}. \end{aligned}$$

étendue, suivant l'ordre des u, à un côté ou à l'autre d'une variété V définie par l'équation (5) $F=0$, ou par le groupe des équations équivalentes (8).

9. La formule (11) donne immédiatement la condition pour que l'intégrale (12) prise le long de toute variété fermée V à $n-1$ dimensions, à l'intérieur de laquelle les fonctions P, Q, ..., S et leurs dérivées partielles du premier ordre sont uniformes et continues, soit égale à zéro.

Il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} \pm \frac{\partial Q}{\partial x_2} \pm \ldots \pm \frac{\partial S}{\partial x_n} = 0, \tag{13}$$

relation dans laquelle, comme nous l'avons dit, on prend toutes les dérivées partielles avec le signe + si n est impair, et avec alternativement les signes + et — si n est pair.

10. Au lieu d'une variété fermée à $n-1$ dimensions, on peut considérer une variété *à frontière,* qui sera définie, par exemple, par l'équation $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ et par une inégalité $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$, si l'on suppose que l'équation $\Phi = 0$ sépare sur l'hypersurface F deux régions distinctes : l'une pour laquelle $\Phi > 0$, l'autre pour laquelle $\Phi < 0$.

Les équations $F=0$, $\Phi=0$ prises ensemble constituent une variété à $n-2$ dimensions que l'on appelle la *frontière complète* de la variété définie par les conditions

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \qquad \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0.$$

Si, au lieu de définir la variété fermée par l'équation $F=0$, on la suppose définie par les équations (8)

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}), \\ x_2 &= f_2(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n &= f_n(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}), \end{aligned}$$

on obtiendra une variété limitée en adjoignant à ces équations une inégalité

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) < 0,$$

qui détermine l'ensemble des points intérieurs à la variété fermée à $n-2$ dimensions $\varphi=0$ dans l'espace $(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$.

Si alors on considère un ensemble de variétés à $n-1$ dimensions, ayant une même frontière définie par l'équation

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) = 0,$$

on verra facilement, sans qu'il soit besoin d'insister, que la relation (13) exprime la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale (12) ne dépende que de la frontière limitant la variété sur laquelle on intègre.

La démonstration suppose, bien entendu, que dans tout le domaine à n dimensions, balayé par cet ensemble de variétés ayant même frontière, les fonctions P, Q, ..., S et leurs dérivées partielles du premier ordre sont uniformes et continues.

On en conclut encore, comme pour les intégrales linéaires, que si le domaine D, tout en étant continu et connexe, est tel que toutes les variétés fermées à $n-1$ dimensions que l'on y peut tracer ne peuvent pas se réduire par une déformation continue à une variété d'un nombre moindre de dimensions, l'intégrale prise le long d'une variété fermée à $n-1$ dimensions se réduira nécessairement à une somme de multiples d'un certain nombre d'entre elles, qui seront les périodes de cette intégrale.

II. — Des intégrales d'ordre quelconque.

11. Nous avons défini les intégrales d'ordre 1 et d'ordre $n-1$ dans l'espace E_n; passons maintenant aux cas intermédiaires ([1]). Nous nous bornerons à l'étude des intégrales multiples d'ordre 2 et 3. L'extension au cas d'un ordre de multiplicité quelconque se fera d'elle-même.

Nous nous proposons donc de définir les expressions symboliques de la forme

$$J = \int\int \sum A_{ik}\, dx_i\, dx_k, \tag{14}$$

([1]) L'étude de ces cas a été faite pour la première fois par M. Poincaré (*Acta mathematica*, t. IX).

considérées comme des intégrales doubles étendues à une variété à deux dimensions, fermée ou limitée. Dans une pareille expression, d'après la définition qui va suivre, l'ordre des différentielles dx_i, dx_k n'est pas indifférent; les A_{ik} sont des fonctions données de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et nous convenons que

$$A_{ik} = -A_{ki},$$

ce qui entraîne $A_{ii} = 0$.

Supposons que la variété à deux dimensions le long de laquelle doit s'effectuer l'intégration soit déterminée par les n équations

$$(15) \qquad x_1 = f_1(u, v), \qquad x_2 = f_2(u, v), \qquad \ldots, \qquad x_n = f_n(u, v),$$

où u et v sont à considérer comme des variables indépendantes. La variété ainsi définie pourra être finie et continue et par suite fermée. C'est ce qui aura lieu en particulier si les f sont des fonctions périodiques de u et v.

Mais aux équations (15) nous pouvons joindre une inégalité

$$(16) \qquad \varphi(u, v) < 0,$$

qui exprimera qu'on ne considère sur la variété (15) que les points qui correspondent à l'intérieur de la courbe $\varphi(u, v) = 0$, soit A, tracée dans le plan des (u, v). On a alors dans l'espace E_n une variété à deux dimensions ayant pour *frontière* la variété à une dimension correspondant à la courbe $\varphi(u, v) = 0$.

Nous pourrions aussi, pour définir une variété fermée, imaginer dans l'espace à 3 dimensions (X, Y, Z), une surface fermée, déterminée en exprimant X, Y et Z en fonction de deux paramètres u et v, et considérer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme des fonctions des coordonnées des points de cette surface. Si au lieu d'une surface fermée dans le même espace (X, Y, Z), on a une surface limitée par un contour, elle donnerait lieu à une variété limitée par une certaine frontière.

Cela posé, l'intégrale (14) sera, par *définition*, l'intégrale double ordinaire

$$\iint \sum A_{ik} \frac{D(x_i, x_k)}{D(u, v)} \, du \, dv,$$

étendue à toutes les valeurs de u et v, si la variété est fermée; étendue à l'aire A définie par $\varphi(u, v) < 0$, si la variété est limitée.

Sous cette forme on voit, à cause de la relation $A_{ki} = -A_{ik}$, que les deux termes qui correspondent aux deux couples ik et ki s'ajoutent. Remarquons aussi que, si l'on permute u et v, cette intégrale change de signe : nous dirons alors, conformément à ce qui a été dit précédemment, que l'intégrale est prise d'un côté ou de l'autre de la variété sur laquelle se fait l'intégration.

12. Cherchons à quelles conditions cette intégrale étendue à une variété fermée, à l'intérieur de laquelle les A_{ik} et leurs dérivées partielles du premier ordre sont continues, est égale à zéro; ou, ce qui revient au même, à quelles conditions cette intégrale ne dépend que de la frontière limitant la variété sur laquelle on intègre.

Nous obtiendrons immédiatement les conditions nécessaires en faisant varier seulement trois des lettres x, soient x_i, x_k, x_h. L'intégrale J se réduit à

$$2\int\int A_{ik}\,dx_i\,dx_k + A_{kh}\,dx_k\,dx_h + A_{hi}\,dx_h\,dx_i.$$

Nous sommes dans le cas de l'espace à trois dimensions. Pour que les conditions que nous cherchons soient remplies, il faut que l'on ait la relation

$$\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_h} + \frac{\partial A_{kh}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{hi}}{\partial x_k} = 0 \tag{17}$$

et cela quelles que soient les valeurs des x. Si d'ailleurs on remarque que cette relation ne change pas quand on effectue une transposition quelconque entre les i, k, h, on obtiendra ainsi autant de relations nécessaires qu'il y a de combinaisons possibles de n lettres trois à trois, soit $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

13. Ces conditions sont-elles suffisantes? Pour le montrer, voyons d'abord ce qui se passe quand on emploie le second mode de représentation, c'est-à-dire quand on définit la surface d'intégration par une surface fermée S dans l'espace XYZ, ses coordonnées étant exprimées en fonction de deux paramètres u et v.

En partant de la relation, facile à vérifier,

$$\frac{D(x_i, x_k)}{D(u, v)} = \frac{D(f_i, f_k)}{D(X, Y)} \frac{D(X, Y)}{D(u, v)} + \frac{D(f_i, f_k)}{D(Y, Z)} \frac{D(Y, Z)}{D(u, v)} + \frac{D(f_i, f_k)}{D(Z, X)} \frac{D(Z, X)}{D(u, v)},$$

on voit que l'intégrale J pourra s'écrire sous la forme

$$\iint \left[\sum A_{ik} \frac{D(f_i, f_k)}{D(X, Y)}\right] dX\, dY + \left[\sum A_{ik} \frac{D(f_i, f_k)}{D(Y, Z)}\right] dY\, dZ + \left[\sum A_{ik} \frac{D(f_i, f_k)}{D(Z, X)}\right] dZ\, dX.$$

C'est une intégrale de surface dans l'espace à trois dimensions. La condition pour que cette intégrale étendue à une surface fermée soit nulle est

$$\frac{\partial}{\partial Z}\left[\sum A_{ik} \frac{D(f_i, f_k)}{D(X, Y)}\right] + \frac{\partial}{\partial X}\left[\sum A_{ik} \frac{D(f_i, f_k)}{D(Y, Z)}\right] + \frac{\partial}{\partial Y}\left[\sum A_{ik} \frac{D(f_i, f_k)}{D(Z, X)}\right] = 0.$$

En développant cette relation, on voit que les termes en A_{ik} disparaissent d'eux-mêmes, en vertu de l'identité

$$\frac{\partial}{\partial Z} \frac{D(f_i, f_k)}{D(X, Y)} + \frac{\partial}{\partial X} \frac{D(f_i, f_k)}{D(Y, Z)} + \frac{\partial}{\partial Y} \frac{D(f_i, f_k)}{D(Z, X)} = 0.$$

Il reste alors

$$\sum_{i,k} \frac{D(f_i, f_k)}{D(X, Y)} \left(\sum_h \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_h} \frac{\partial f_h}{\partial Z}\right) + \sum_{ik} \frac{D(f_i, f_k)}{D(Y, Z)} \left(\sum_h \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_h} \frac{\partial f_h}{\partial X}\right) + \sum_{ik} \frac{D(f_i, f_k)}{D(Z, X)} \left(\sum_h \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_h} \frac{\partial f_h}{\partial Y}\right) = 0,$$

ou, en réunissant tous les termes dans une sommation triple

$$\sum_{ikh} \left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_h} + \frac{\partial A_{kh}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{hi}}{\partial x_k}\right) \frac{D(f_i, f_k, f_h)}{D(X, Y, Z)} = 0,$$

la sommation étant étendue à toutes les combinaisons de n lettres

trois à trois. Cette condition est satisfaite si les relations (17) sont satisfaites, et l'on en conclut que ces relations sont suffisantes pour que l'intégrale J étendue à une variété fermée définie par la surface S, et sous les conditions spécifiées, soit égale à zéro.

Cette démonstration laisse toutefois subsister un doute. Nous avons supposé que les x étaient des fonctions de X, Y, Z, ces dernières étant exprimées en fonction de u et v. Il n'est pas certain que ce mode de représentation puisse s'appliquer à une variété quelconque à deux dimensions. Toute variété à deux dimensions peut, au contraire, se représenter par le système des équations (15). Nous allons donc reprendre la démonstration en nous servant d'ailleurs du résultat précédent.

Nous devons alors concevoir que les x sont exprimés en fonction de deux paramètres u et v et d'une constante arbitraire ε

$$x_i = f_i(u, v, \varepsilon) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ε variant entre certaines limites, et l'on suppose que les valeurs des x ne dépendent pas de ε quand le point (u, v) est sur le contour $A[\varphi(u, v) = 0]$ dont nous avons parlé plus haut. Il faut montrer que l'intégrale J ne dépend pas de ε. Posons

$$u = X, \qquad v = Y, \qquad \varepsilon = Z.$$

D'après ce qui précède, si les conditions (17) sont satisfaites, l'intégrale le long de toute surface fermée dans l'espace (XYZ) sera nulle.

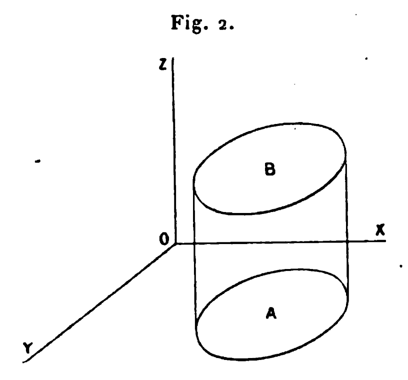
Prenons pour surface d'intégration la surface totale d'un cylindre dont la base dans le plan des XY est la courbe A, et dont la hauteur est égale à ε. Soit B la base supérieure, qui est une courbe égale à A. Or les x ne dépendent pas, par hypothèse, de ε, quand le point (u, v) est sur le contour A : les déterminants fonctionnels

$$\frac{D(x_i, x_k)}{D(Y, Z)}, \quad \frac{D(x_i, x_k)}{D(Z, X)}$$

seront donc nuls sur la surface latérale et, par suite, l'intégrale relative à cette surface sera égale à zéro. Par suite, la somme des intégrales étendues respectivement à l'aire A et à l'aire B est nulle, et si l'on intègre d'un même côté de ces surfaces par rapport au

plan XY, ces deux intégrales seront égales. Les conditions (17) trouvées comme nécessaires sont donc bien suffisantes.

Fig. 2.



Il est important de remarquer en terminant que les conclusions précédentes exigent que, lorsqu'on déforme la surface en laissant sa frontière invariable, elle doit, en se déformant, ne rencontrer aucun des systèmes de valeurs des x pour lesquelles les A_{ik} deviendraient infinies ou mal déterminées.

Enfin, on conçoit, comme pour les intégrales d'ordre *un* et d'ordre $n-1$, que, dans un domaine D où toutes les variétés fermées E_2 ne pourraient pas se réduire à un point ou à une ligne, l'intégrale prise le long d'une de ces variétés devra se réduire à une somme de multiples d'un certain nombre d'entre elles, qui seront les *périodes* de l'intégrale considérée.

14. Bornons-nous, pour terminer, à définir les intégrales multiples d'ordre 3 dans l'espace à n dimensions.

L'expression symbolique

$$J = \int\int\int \sum A_{ikl}\, dx_i\, dx_k\, dx_l, \tag{18}$$

considérée comme une intégrale triple, étendue à une variété à 3 dimensions, se définit de la manière suivante : Les dx_i, dx_k, dx_l sont trois quelconques des n différentielles $dx_1, \ldots, dx_n$, dont l'ordre ne doit pas être interverti. Les fonctions A_{ikl} sont des fonctions données de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Deux fonctions A_{ikl} sont égales en valeur absolue si elles ne diffèrent que par l'ordre des

indices, mais elles changent de signe quand on passe de l'une à l'autre par *une* transposition. On aura donc en particulier

$$A_{ikl} = -A_{kil} = +A_{kli}.$$

Cela posé, si l'on suppose que la variété à 3 dimensions, sur laquelle on intègre, est définie par les équations

$$x_i = f_i(u, v, w) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

l'intégrale triple J (18) sera, par définition, l'intégrale triple ordinaire

$$\int\int\int \sum A_{ikl} \frac{D(x_i, x_k, x_l)}{D(u, v, w)} \, du \, dv \, dw,$$

étendue, s'il s'agit d'une variété à frontière, à tout le domaine $\varphi(u, v, w) < 0$, limité par une surface $\varphi(u, v, w) = 0$ dans l'espace (u, v, w).

On trouvera les conditions nécessaires pour que cette intégrale ne dépende que de la frontière de la variété d'intégration, en ne considérant d'abord comme variables que quatre des lettres x, soient x_i, x_k, x_l, x_m. On est alors dans le cas d'une intégrale d'ordre $n - 1$ dans un espace à n dimensions $(n = 4)$. Les conditions d'intégrabilité nécessaires sont donc

$$\frac{\partial A_{ikl}}{\partial x_m} - \frac{\partial A_{klm}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{lmi}}{\partial x_k} - \frac{\partial A_{mik}}{\partial x_l} = 0,$$

et le nombre de ces conditions est égal au nombre des combinaisons de n lettres quatre à quatre.

Pour démontrer qu'elles sont suffisantes, on procédera ensuite comme dans le cas des intégrales multiples d'ordre deux.

CHAPITRE II.

SUR LA GÉOMÉTRIE DE SITUATION (ANALYSIS SITUS).

I. — Généralités sur les variétés à un nombre quelconque de dimensions.

1. Nous allons nous occuper, dans cette Section, de diverses questions concernant la Géométrie de situation dans les espaces à un nombre quelconque de dimensions, questions dont l'ensemble est souvent désigné sous le nom d'*Analysis situs*. Cette théorie a été fondée par Riemann, qui lui a donné ce nom; dans ses études sur les fonctions abéliennes, le grand géomètre ne considère que les espaces à deux dimensions, mais il a ensuite généralisé ses recherches pour un nombre quelconque de dimensions, comme le montrent des Notes publiées après sa mort dans le Volume renfermant ses Œuvres complètes ([1]). Indépendamment de Riemann, Betti avait de son côté étudié les divers ordres de connexion dans les espaces à n dimensions, et publié un Mémoire fondamental sur ce sujet ([2]). Dans son Mémoire sur les fonctions algébriques de deux variables ([3]), M. Picard avait montré l'intérêt que présentent des considérations de ce genre dans l'étude des surfaces algébriques. Tout récemment, M. Poincaré ([4]) a repris d'une manière générale cette question de l'*Analysis situs,* et, après avoir complété et précisé les résultats obtenus par Betti, a appelé l'attention sur les différences considérables que présentent ces théories, suivant qu'il s'agit d'un espace à deux dimensions ou d'un espace à un plus grand nombre de dimensions.

([1]) *Œuvres complètes de Riemann.*
([2]) *Annali di Matematica,* t. IV (1870-71).
([3]) *Journal de Mathématiques* (1889).
([4]) *Journal de l'École Polytechnique* (1895).

2. Considérons un espace à n dimensions $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et, dans cet espace, un espace S_{n-m} à $n-m$ dimensions; un tel espace sera dit *linéairement connexe* si l'on peut joindre par une ligne continue, sans sortir de S_{n-m}, deux points de cet espace. Au lieu d'employer l'expression d'*espace,* il nous arrivera souvent d'employer le terme de *variété,* de *multiplicité* ou de *continuum,* voulant désigner par là un certain *ensemble continu* de points dépendant d'un nombre de paramètres égal à la dimension de cette variété ou de ce continuum.

Il peut arriver que la variété S_{n-m} soit définie de diverses manières. On peut concevoir que l'on ait les m égalités

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots, \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \end{aligned}$$

et un certain nombre d'inégalités

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &> 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &> 0, \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots, \\ \varphi_q(x_1, x_2, \ldots, x_n) &> 0. \end{aligned}$$

On suppose que les fonctions F et φ sont des fonctions analytiques bien déterminées, et que les divers déterminants fonctionnels des F considérées comme fonctions de m des lettres x ne s'annulent jamais tous à la fois. Les égalités et inégalités précédentes, si elles peuvent être vérifiées pour certaines valeurs des x, définissent en général une multiplicité à $n-m$ dimensions, qui sera linéairement connexe, ou se partagera en plusieurs variétés linéairement connexes. Nous supposerons qu'il n'y ait qu'une seule variété connexe, et nous aurons alors un espace S_{n-m}.

3. Cette manière de définir un espace S_{n-m} n'est pas la plus générale. On peut définir un tel espace, au moins dans le voisinage d'un point par des équations de la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi_1(u_1, u_2, \ldots, u_{n-m}), \\ \ldots&\ldots\ldots\ldots, \\ x_n &= \psi_n(u_1, u_2, \ldots, u_{n-m}), \end{aligned}$$

les ψ étant des fonctions bien déterminées des u, que, en nous réduisant aux espaces *analytiques,* nous pouvons supposer comme plus haut être des fonctions analytiques des u dans un certain domaine. Nous avons alors une certaine portion de l'espace S_{n-m}; on peut ensuite faire l'extension analytique de cet espace, c'est-à-dire des fonctions ψ, et le prolongement de la représentation paramétrique nous donnera de proche en proche un prolongement de S_{n-m}. Il se peut que, dans chacune de ces représentations ou dans quelques-unes d'entre elles, les paramètres ne puissent pas prendre toutes les valeurs du champ de convergence, mais satisfassent à une ou plusieurs inégalités

$$P_i(u_1, u_2, \ldots, u_{n-m}) > 0.$$

4. La notion de *frontière* d'une multiplicité S_{n-m} se pose d'elle-même; une frontière est une multiplicité d'ordre $n - m - 1$ qui empêche la continuation de S_{n-m}. Supposons d'abord que cette variété soit définie par les égalités et inégalités considérées au début du numéro précédent; s'il existe des valeurs des x formant une multiplicité d'ordre $n - m - 1$, satisfaisant aux équations et inégalités

$$\begin{aligned} &F_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \\ &\varphi_1 = 0, \\ &\varphi_\lambda > 0 \quad (\lambda = 2, \ldots, q), \end{aligned}$$

la multiplicité définie par ces équations et inégalités sera une frontière de S_{n-m}; dans le cas actuel, il pourra y avoir q frontières en associant successivement aux m équations chacune des inégalités transformée en égalité.

Avec la définition générale des variétés résultant du prolongement analytique d'une représentation paramétrique, une frontière est formée par l'ensemble des points correspondant à une des inégalités relatives aux paramètres, cette inégalité étant transformée en égalité. Ainsi, soit, pour une certaine représentation

$$P(u_1, u_2, \ldots, u_{n-m}) > 0$$

une des inégalités auxquelles doivent satisfaire les paramètres;

on suppose que, dans le domaine, la fonction φ soit susceptible de s'annuler en changeant de signe. La relation

$$P(u_1, u_2, \ldots, u_{n-m}) = 0$$

définira une certaine portion d'une frontière dans le domaine correspondant à la relation paramétrique envisagée, et cette portion de frontière se prolongera analytiquement avec ce domaine.

Il peut arriver qu'*une multiplicité n'ait pas de frontière*. Pour le moment au moins, nous ne considérerons que des multiplicités S_{n-m} restant tout entières à distance finie; une telle multiplicité, quand elle n'aura pas de frontière, peut être dite une *multiplicité fermée*.

Dans toutes ces définitions, nous ne faisons qu'étendre à un nombre quelconque de dimensions des notions familières dans l'espace à deux et trois dimensions. Une variété à deux dimensions dans l'espace à trois dimensions est ce que l'on appelle une *surface;* les frontières de celles-ci sont des courbes, et une surface restant tout entière à distance finie et n'ayant pas de frontière est une surface fermée.

5. Il peut arriver que des multiplicités analytiques se coupent elles-mêmes, et qu'elles se recouvrent totalement elles-mêmes. Pour bien faire comprendre ce que nous entendons par là, prenons une surface analytique dans l'espace à trois dimensions ($n = 3$, $m = 1$). Une portion de surface qui a une ligne double se coupe elle-même. Un exemple bien connu d'une surface se recouvrant elle-même est fourni par un rectangle de papier *abcd* que l'on replie sur lui-même de la façon suivante : Soient *ab* et *cd* deux côtés parallèles, de telle sorte que *a* et *d*, ainsi que *b* et *c*, désignent des sommets opposés. On contourne la feuille de papier de manière que *ab* vienne coïncider avec *dc*, en faisant coïncider par conséquent les sommets opposés. On réalise ainsi une surface limitée par une seule frontière et qui se recouvre totalement elle-même.

Les circonstances que nous venons de rencontrer sont générales; il peut arriver qu'une variété S_{n-m} se recouvre totalement

elle-même; appelons variété *double* une telle variété ([1]). Pour définir d'une manière générale une variété de cette nature, considérons dans le voisinage d'un point A, que nous ne supposons pas sur une frontière, une représentation paramétrique; on pourra évidemment de cette représentation déduire, entre les coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'un point quelconque de la variété suffisamment voisin de A, m relations de la forme

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&, \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \end{aligned}$$

les F étant holomorphes autour des coordonnées $x_1^0, \ldots, x_n^0$ de A. Envisageons d'autre part $n-m-1$ formes quadratiques homogènes en $x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0$, définies et linéairement indépendantes; nous les supposerons positives et les désignerons par

$$\lambda_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad \lambda_{n-m-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Ceci posé, aux m équations ci-dessus, adjoignons les $n-m-1$ équations

$$\lambda_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-m-1),$$

les ε_i étant des quantités positives très petites. Nous avons maintenant $n-1$ équations qui définiront évidemment une petite *courbe fermée* C autour du point A, courbe située dans l'espace S_{n-m}. Sur cette courbe, on peut concevoir tracé un certain sens de flèche bien défini.

Imaginons maintenant que le point A se déplace sur S_{n-m}; en nous servant des prolongements successifs des représentations paramétriques et des équations auxiliaires $\lambda_i = \varepsilon_i$, où $x_1^0, \ldots, x_n^0$ sont chaque fois à remplacer par les coordonnées actuelles de A, nous pouvons considérer que le point A, pendant son mouvement, entraîne avec lui la courbe fermée C qui se déforme en même temps, mais pour laquelle le sens de flèche marqué au début est

([1]) M. Poincaré appelle variété *unilatère*, les variétés de ce genre; comparer la définition qu'il donne de ces variétés (Mémoire cité) avec celle que nous donnons dans le texte.



toujours défini sans ambiguïté. Deux circonstances peuvent alors se présenter.

En premier lieu, il peut arriver que A, revenant à son point de départ après avoir suivi sur S_{n-m}, sans traverser une frontière, un chemin fermé *quelconque,* la courbe C au retour vienne se replacer sur sa position initiale, *les deux sens de flèche coïncidant.* Dans ce cas, la variété est *simple;* elle ne se recouvre pas elle-même.

Il peut arriver au contraire, en second lieu, que, pour certains chemins fermés décrits par A, on ne retrouve pas au retour le même sens de flèche pour la courbe C; nous aurons alors une variété *double.*

6. Au point de vue analytique, on voit qu'à un sens défini sur la courbe C, correspondent des signes déterminés pour les coefficients différentiels

$$\alpha_1 = \frac{dx_1}{ds}, \qquad \alpha_2 = \frac{dx_2}{ds}, \qquad \dots, \qquad \alpha_n = \frac{dx_n}{ds}.$$

Posons

$$A_i = \frac{\partial(F_1, F_2, \dots F_{i-1}, F_{i+1}, \dots, F_m, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-m-1})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)},$$

on a

$$\frac{\alpha_1}{A_1} = \frac{\alpha_2}{A_2} = \dots = \frac{\alpha_n}{A_n} = \frac{1}{\pm\sqrt{A_1^2 + \dots + A_n^2}}.$$

En choisissant le signe + pour le radical, on a pour les α_i des valeurs déterminées en grandeur et en signe. D'ailleurs $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des fonctions linéaires des déterminants fonctionnels des F considérées comme fonctions de m des lettres x, et leurs coefficients qui ne dépendent que de $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-m-1}$ sont arbitraires. Si donc la surface est *simple,* ces déterminants fonctionnels devront reprendre la même valeur en grandeur et en signe quand, partant d'un point A sur la variété S_{n-m}, on y revient après avoir parcouru un chemin fermé quelconque sur cette variété.

On pourrait encore présenter la question de la manière suivante : Considérons dans l'espace E_n une demi-droite passant par le point A. Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ ses paramètres, de sorte que ses

équations sont de la forme

$$\frac{x_1 - x_1^0}{A_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{A_2} = \ldots = \frac{x_n - x_n^0}{A_n};$$

nous la supposons assujettie à la condition

$$A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \ldots + A_n dx_n = 0,$$

dx_1, dx_2, ... dx_n étant un élément linéaire de la variété S_{n-m}. Entre les A_n existent m équations linéaires homogènes dont les coefficients sont les différents déterminants fonctionnels des F par rapport à m des lettres x. On peut choisir arbitrairement m des A_i, et les autres seront déterminées en fonction des coordonnées du point A. La conclusion est la même que précédemment. Si la surface est simple, quand A reviendra à son point de départ après avoir suivi sur S_{n-m} un chemin fermé quelconque, la demi-droite devra se replacer sur sa position initiale sans que son sens ait changé, et les déterminants fonctionnels reprendront la même valeur en grandeur et en signe.

Pour le cas d'une surface double, dans l'espace à trois dimensions, on voit immédiatement que les considérations précédentes prennent une forme très simple. La courbe C sera, si l'on veut, l'intersection de la surface avec une petite sphère de centre A. La droite, considérée en second lieu, est la normale à la surface au point A, sur laquelle on peut, à partir de ce point, distinguer deux demi-droites. Un observateur placé sur une de ces demi-droites, les pieds en A, voit la flèche tracée sur C tourner dans un certain sens. Quand le point A se déplace, le sens de rotation reste évidemment toujours le même, et deux cas peuvent se présenter quand A revient à son point de départ : la demi-normale revient toujours à sa position initiale, c'est le cas des surfaces simples; ou bien, par un chemin convenable, elle coïncide au retour avec la demi-normale opposée, et la surface est alors une surface double.

Le point de vue auquel nous venons de nous placer en dernier lieu peut d'ailleurs être généralisé pour une variété d'ordre $n-1$ dans un espace d'ordre n. On peut, comme au Chap. I, n° 6, définir la *normale* à la variété S_{n-1} et, sur cette normale, considérer deux demi-directions; l'espace S_{n-1} est simple si, partant d'une demi-

normale déterminée en A, on revient toujours au même point avec la même direction de normale; elle sera double dans le cas contraire.

7. Faisons encore quelques remarques. Toute variété V, définie comme au n° 2, c'est-à-dire par un certain nombre d'égalités et d'inégalités, est toujours simple. Cela résulte de ce que les différents déterminants fonctionnels sont en chaque point déterminés en grandeur et en signe, pourvu qu'on ne change pas l'ordre dans lequel sont écrites les équations.

Toute variété *fermée* V d'ordre $n-1$, dans l'espace général $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ à n dimensions, est toujours une variété simple. Tout d'abord, cette variété partagera l'espace en deux parties non connexes; il en est évidemment ainsi si $n=2$, et il suffira, par suite, de faire voir que l'on peut passer de $n-1$ à n. Or, en faisant

$$x_1 = C,$$

nous découpons dans V une certaine variété fermée à $n-2$ dimensions. L'espace à $n-1$ dimensions $(x_1, \ldots, x_n)$, en donnant à x_1 la valeur C, est alors partagé en deux parties non connexes; et, en faisant varier C, l'espace S_n se trouve partagé par V en deux parties telles que l'on ne peut aller de l'une à l'autre sans traverser V.

Toute courbe à une dimension est simple.

Il est entendu expressément que toutes les variétés considérées par la suite sont des variétés simples. On pourrait d'ailleurs montrer que toute variété double est la limite d'une variété simple dont les éléments, convenablement associés, sont venus deux à deux se confondre. C'est ainsi qu'on se représente aisément la variété simple dont la limite est la variété double, rappelée plus haut, obtenue avec un rectangle; au lieu d'opérer avec un rectangle, il suffirait d'opérer avec un cylindre elliptique très aplati.

8. Considérons, dans un espace à un nombre quelconque de dimensions, une variété E_n à n dimensions, et soit V une variété fermée d'ordre m contenue dans E_n. Sauf le cas où $m = n-1$, on pourra par cette variété faire passer une infinité de variétés à $m+1$ dimensions entièrement contenues dans E_n. Parmi ces

variétés, il en existe toujours sur lesquelles V ne forme pas frontière. C'est ainsi que, par une ligne fermée plongée dans une variété à trois dimensions, on peut toujours imaginer une surface du genre tore passant par cette ligne dont les dimensions méridiennes soient assez petites pour qu'elle soit entièrement contenue dans E_3. Mais la circonstance inverse pourra ne pas se présenter, c'est-à-dire qu'il pourra ne pas exister de variété S_{m+1} passant par V, contenue dans E_n, sur laquelle V forme frontière. Dans ce cas, cette variété ne pourra pas, par une déformation continue, se réduire à une variété d'ordre moindre, et nous dirons qu'*elle ne forme pas frontière sur* E_n. *Elle formera,* au contraire, *frontière sur* E_n s'il existe une variété S_{m+1} contenue dans E_n et sur laquelle elle forme frontière.

Si, au lieu d'une seule variété d'ordre m contenue dans E_n, nous considérons un ensemble de plusieurs variétés, soient

$$V_1, \quad V_2, \quad \ldots, \quad V_\lambda$$

qui, prises séparément, ne forment pas frontière; les mêmes remarques peuvent être faites. Nous dirons que ce groupe de variétés *forme* ou *ne forme pas frontière sur* E_n suivant qu'on pourra ou ne pourra pas trouver une variété fermée S_{m+1} contenue dans E_n et sur laquelle ces variétés prises ensemble forment frontière.

D'après la définition même des variétés formant frontière, on voit que si un groupe de variétés V d'ordre m, qui peuvent d'ailleurs se réduire à une, forme frontière sur une variété S_{m+1} d'ordre $m+1$, toute courbe fermée, tracée dans cette variété, devra les couper en un nombre pair de points, et que réciproquement, si elles ne forment pas frontière, on pourra imaginer une courbe fermée les coupant en un seul point.

9. Adjoignons maintenant à une variété *simple* S_m à m dimensions la courbe C dont nous avons précisément fait usage dans le n° 5 pour définir ce genre de variété. Si, après avoir fixé un sens sur cette courbe, on prend le sens contraire, on distinguera la variété S_m prise avec un certain sens de la variété S_m prise avec le sens contraire en disant que ce sont *deux variétés opposées* ou *de sens contraire.* C'est ainsi que dans l'espace à trois dimensions on distingue deux côtés différents sur une surface.

Si deux variétés simples fermées S_m et S'_m forment frontière sur une variété S_{m+1}, on pourra, après avoir attribué un sens à S_m. déformer cette variété d'une manière continue de manière que l'une de ses parties vienne à coïncider avec une partie de S'_m. On pourra ainsi fixer le sens qui devra être attribué à cette seconde variété, lequel devra être opposé au premier, en sorte que les éléments linéaires qui viennent à se superposer se détruisent. On comprend ainsi qu'on puisse dire que, si les variétés S_m et S'_m forment frontière sur S_{m+1}, la variété S_m et la variété opposée à S'_m ne forment pas frontière.

10. Donnons encore une définition. Par variété *voisine* de S_m, nous entendons une variété dont les équations et inégalités de définition diffèrent infiniment peu de celles qui sont relatives à S_m. D'après ce que nous venons de dire, une variété S_m et une variété voisine opposée à S_m forment la frontière d'une variété S_{m+1} très petite et qu'on peut réduire à zéro. Dans ce qui suit, nous considérerons comme identiquement nul l'ensemble de deux variétés voisines opposées, et quand nous parlerons de k variétés très voisines d'une variété S_m, nous sous-entendrons toujours que ces variétés sont de même sens, ou que k est l'excès du nombre des variétés prises dans un sens sur le nombre des variétés prises en sens contraire.

II. — Des différents ordres de connexion dans les espaces à n dimensions.

11. Ces préliminaires étant posés, nous pouvons définir d'une manière générale les nombres qui représentent les ordres de connexion d'une variété E_n à n dimensions par rapport aux variétés S_m d'ordre moindre qui y sont contenues. Nous désignerons ces nombres sous le nom de *nombres de Riemann et de Betti*.

Supposons que dans la variété E_n on puisse trouver $p_m - 1$ variétés fermées S_m d'ordre m, soient

$$V_1,\quad V_2,\quad \ldots,\quad V_{p_m-1}$$

jouissant des propriétés suivantes : prises séparément, elles ne

forment pas frontière, et, par une déformation continue, elles ne peuvent se réduire l'une à l'autre; de plus par k_1 variétés voisines de V_1, par k_2 variétés voisines de $V_2, \ldots$, par k_{p_m-1} variétés voisines de V_{p_m-1}, on ne peut pas faire passer une variété S_{m+1} complètement contenue dans E_n, dont ces $k_1+k_2+\ldots+k_{p_m-1}$ variétés formeraient *une frontière complète,* et cela quels que soient les entiers $k_1, k_2, \ldots, k_{p_m-1}$. Par k variétés voisines de V, il est d'ailleurs bien entendu qu'il s'agit de k variétés de même sens.

Cela étant, nous dirons que l'ordre de connexion de E_n, par rapport aux variétés à m dimensions contenues dans cette variété, est p_m si, ayant trouvé les $p_m - 1$ variétés précédentes dont l'ensemble ne forme pas une frontière complète dans le sens général que nous venons de définir, on peut toujours, en leur adjoignant une $p_m^{\text{ième}}$ variété fermée quelconque d'ordre m, soit V, contenue dans E_n, déterminer les entiers k de manière que l'ensemble formé par cette variété seule, et par k_1 variétés voisines de V_1, par k_2 variétés voisines de $V_2, \ldots$, par k_{p_m-1} variétés voisines de V_{p_m-1}, forme une frontière complète. Les entiers k peuvent d'ailleurs être nuls, ce qui voudra dire que la variété V prise isolément forme frontière.

12. Cette définition est justifiée par le lemme suivant : Si, dans une variété E_n, un système A, conjointement avec un autre système C, composés tous deux de variétés fermées à m dimensions, forme une frontière complète, et si un autre système B de variétés fermées à m dimensions forme avec C une frontière complète, on peut affirmer que l'ensemble des variétés non communes à A et B forme une frontière complète dans E_n, c'est-à-dire qu'il existe une variété d'ordre $m+1$ contenue dans E_n sur laquelle cet ensemble forme frontière.

Soient S_{m+1} et S'_{m+1} deux variétés à $m+1$ dimensions contenues dans E_n sur lesquelles A et C d'une part, B et C d'autre part, forment respectivement frontière. Joignons un point de S_{m+1} à un point de S'_{m+1} par une ligne continue et envisageons une variété d'ordre m suffisamment petite se déplaçant le long de cette ligne; elle engendrera une variété d'ordre $m+1$, qui réunira d'une manière continue les deux variétés S_{m+1}, S'_{m+1}, de manière à en former une seule S''_{m+1}, sur laquelle A et C d'une part, B et C d'autre part,

formeront frontière. La démonstration est alors immédiate; toute courbe fermée appartenant à S''_{m+1} coupera l'ensemble des variétés non communes à A et B en un nombre pair de points, ce qui suffit à établir le lemme énoncé.

Dans le cas où les variétés du système C ne concourraient pas toutes à former la frontière des systèmes A, C, et B, C, il faudrait adjoindre aux variétés non communes à A et B, celles des variétés C qui ne sont pas communes aux frontières formées par les systèmes A, C et B, C.

13. Nous allons conclure de là que si t variétés fermées à m dimensions $A_1, A_2, \ldots, A_t$ ne peuvent pas former seules, mais forment avec toute autre variété fermée à m dimensions une frontière dans E_n, et si un autre système de t' variétés fermées à m dimensions $B_1, B_2, \ldots, B_{t'}$, jouit de la même propriété, on aura nécessairement $t = t'$.

Soit V une variété fermée quelconque à m dimensions; désignons par le symbole kA, l'ensemble de k variétés voisines de A : on peut déterminer les entiers k de manière que l'ensemble formé par la variété V et par les variétés $k_1 A_1$, $k_2 A_2$, ..., $k_t A_t$ forme frontière. Remarquons d'abord que les entiers k sont bien déterminés, car, autrement comme la variété V et la variété opposée à V prises ensemble forment frontière, on en conclurait qu'on pourrait former avec les A seuls une frontière complète. D'autre part, on peut, par hypothèse, déterminer les entiers k de manière que chacun des t' ensembles

$$k_1^i A_1, \quad k_2^i A_2, \quad \ldots, \quad k_t^i A_t, \quad B_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, t')$$

forme frontière, et déterminer les entiers λ de manière que l'ensemble

$$\lambda_1 B_1, \quad \lambda_2 B_2, \quad \ldots, \quad \lambda_{t'} B_{t'}, \quad V$$

forme frontière. Or, on peut substituer à $\lambda_i B_i$ l'ensemble

$$\lambda_i k_1^i A_1, \quad \lambda_i k_2^i A_2, \quad \ldots, \quad \lambda_i k_t^i A_t \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, t').$$

On voit de suite que cela exige qu'on ait entre les entiers k et λ les t équations

$$\begin{aligned}
\lambda_1 k_1^1 + \lambda_2 k_1^2 + \ldots + \lambda_{t'} k_1^{t'} &= k_1, \\
\lambda_1 k_2^1 + \lambda_2 k_2^2 + \ldots + \lambda_{t'} k_2^{t'} &= k_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\
\lambda_1 k_t^1 + \lambda_2 k_t^2 + \ldots + \lambda_{t'} k_t^{t'} &= k_t,
\end{aligned}$$

d'où l'on conclut, puisque la variété V est arbitraire, l'inégalité $t' \leqq t$. On verrait de même, en partant des B, que $t \leqq t'$. On en conclut que t est égal à t'. Nous voyons donc que le nombre p_m, qui figure dans la définition donnée ci-dessus, ne dépend pas du choix particulier du système des variétés d'ordre m envisagées.

Comme conséquence des théorèmes précédents, nous pouvons dire d'une manière générale que si $V_1, V_2, \ldots, V_{p_m}$ désignent p_m variétés fermées, dans une variété E_n dont l'ordre de connexion par rapport aux variétés à m dimensions est p_m, on pourra trouver p_m nombres entiers $k_1, k_2, \ldots, k_{p_m}$ tels que l'ensemble formé par les variétés $k_1 V_1, k_2 V_2, \ldots, k_{p_m} V_{p_m}$ forme frontière.

14. Indiquons quelques exemples qui feront bien comprendre les définitions générales que nous venons de donner. Le cas le plus simple que l'on puisse citer est celui d'une variété à deux dimensions dans l'espace à deux dimensions; on a alors un espace plan limité par un certain nombre de courbes, une courbe extérieure C et des courbes intérieures $C_1, C_2, \ldots, C_p$: il est clair que que l'on peut tracer dans cet espace p courbes fermées ne formant pas la limite complète d'une variété à deux dimensions entièrement comprise dans l'espace considéré : il suffit de tracer p courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_p$ autour des courbes $C_1, \ldots, C_p$ respectivement. Au contraire, toute autre courbe fermée, soit seule, soit avec toutes les courbes Γ ou quelques-unes d'entre elles, limitera un espace à deux dimensions entièrement contenu dans notre espace. On aura donc

$$p_1 - 1 = p.$$

L'ordre de connexion sera donc ici $p + 1$.

Prenons maintenant le cas d'une surface E_2 et, pour plus de simplicité, supposons-la placée dans l'espace à trois dimensions; considérons d'ailleurs seulement le cas où cette surface est fermée. On sait le rôle que jouent les surfaces fermées dans la théorie des fonctions algébriques d'une variable; supposons que la surface envisagée ait p trous. Quel sera le nombre p_1 correspondant à la connexité pour $m = 1$? On pourra tracer $2p$ courbes, une à travers chaque trou et une autour de chaque trou, qui ne limiteront aucune portion de la surface, mais toute autre courbe fermée,



soit seule, soit avec les $2p$ courbes précédentes ou une partie d'entre elles, limitera une portion de la surface. On aura donc

$$p_1 - 1 = 2p.$$

L'ordre de connexion sera donc $2p + 1$.

Passons à des variétés E_3. L'espace compris entre deux sphères dans l'espace à trois dimensions formera une variété E_3; nous avons maintenant deux nombres p_1 et p_2. On peut avoir une surface ne limitant aucune portion de E_3, mais *une* seulement, et, par suite

$$p_2 - 1 = 1, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad p_2 = 2.$$

Pour le nombre p_1, on aura

$$p_1 - 1 = 0,$$

car, pour toute courbe fermée de notre espace, on peut faire passer une variété à deux dimensions, c'est-à-dire une surface, dont la courbe soit la limite complète.

Je considère encore la variété E_3 formée par les points à l'intérieur d'un tore. Toute surface fermée dans cet espace en limite une partie, car cette surface est ou une surface fermée comme une sphère, ou une surface fermée comme un tore s'emboîtant dans le premier, donc $p_2 = 1$. On peut, au contraire, tracer une courbe qui ne pourra être la frontière complète d'une surface contenue dans E_3, par exemple la circonférence lieu des centres des méridiens, mais toute autre courbe fermée, soit seule, soit avec celle-là formera la limite complète d'une variété à deux dimensions; par suite $p_1 = 2$.

On verra enfin facilement que, pour la variété E_3 comprise entre deux tores, on a

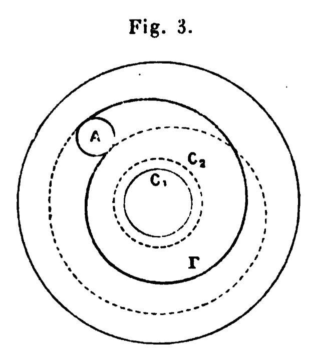
$$p_2 = 2, \qquad p_1 = 3.$$

15. Un point a pu étonner dans les définitions générales du n° **11**, c'est l'introduction de k variétés voisines d'une variété V. Cette introduction est nécessaire, car autrement on ne pourrait pas toujours faire passer, par $p_m - 1$ variétés fermées V et par une $p_m$ième variété fermée arbitraire, un continuum à $m+1$ dimensions satisfaisant aux conditions voulues. Prenons, par exemple, l'intérieur d'un tore, pour lequel $p_1 = 2$, et concevons à l'inté-

rieur du tore une courbe fermée Γ qui tournerait deux fois autour de l'axe du tore; toute autre courbe fermée C à l'intérieur du tore s'enroulant une fois autour de l'axe forme avec Γ la limite complète d'une variété à deux dimensions, entièrement contenue dans le tore; mais pour que ceci soit exact, il faut entendre cette phrase sous la forme généralisée du n° 10, c'est-à-dire qu'il y aura une surface ayant pour limite complète Γ et *deux* courbes (ici $k = 2$) voisines de la courbe C.

Soit une courbe Γ qui s'enroule deux fois, sans former nœud, autour de XY. On peut imaginer, passant par cette courbe, un

Fig. 3.

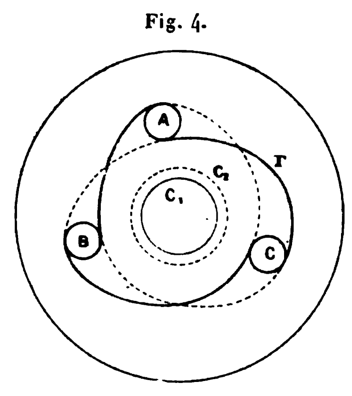


tore creux d'axe XY ayant un trou A, ou plus exactement deux tores intérieurs l'un à l'autre, dans la surface de chacun desquels on a découpé un trou dont les contours sont reliés respectivement par une surface cylindrique. La courbe Γ, en s'enroulant deux fois, passe de l'intérieur à l'extérieur de cette surface Σ par le trou A, sans se couper. Cette courbe seule ne forme pas frontière. Il faut lui adjoindre deux courbes telles que C_1 et C_2 tournant chacune une fois autour de l'axe du tore, et dont l'une est extérieure et l'autre intérieure. On peut supposer ces deux courbes très voisines, et, pour former frontière avec Γ, elles doivent être parcourues dans le même sens. Si on les suppose opposées, c'est-à-dire parcourues en sens contraire, il faut imaginer, passant par ces deux courbes, une surface fermée du genre sphère ou du genre tore sur laquelle elles découperont une sorte de tronc de cône.

Le cas plus compliqué où la courbe s'enroule deux fois en

formant nœud autour d'un certain axe peut être traité de la même manière.

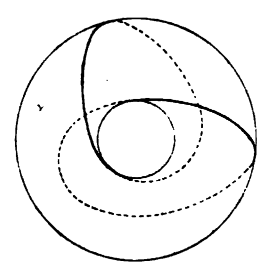
Fig. 4.



Nous prendrons la même surface que précédemment, formée des surfaces de deux tores intérieurs, mais nous les supposerons percés de trois trous A, B, C dont les contours sont reliés par une surface cylindrique. La figure montre suffisamment comment est disposée la courbe Γ sur cette surface, et les conclusions sont les mêmes.

Comme dernier exemple, considérons encore deux courbes à l'intérieur d'un tore, ces deux courbes se traversant l'une l'autre.

Fig. 5.



On pourra faire passer par ces deux courbes une sorte de tore Σ (surface à un trou) entièrement contenu dans le tore initial, et ces deux courbes limiteront sur Σ une portion de surface.

16. Revenons maintenant à l'étude générale des connexions. La considération des intégrales va nous conduire à envisager sous

un nouveau point de vue toute cette théorie. Supposons que la variété E_n soit située dans l'espace général à p dimensions ($p \geqq n$), où nous désignons les coordonnées d'un point par ($x_1, x_2, \ldots, x_p$), de sorte que pour la variété E_n il y a $p - n$ relations entre les x.

Dans l'espace général à p dimensions, considérons une intégrale simple

$$(1) \qquad \int \sum_{i=1}^{i=n} X_i \, dx_i,$$

où les X sont des fonctions des quantités réelles $x_1, x_2, \ldots, x_p$ restant uniformes et continues quand le point ($x_1, x_2, \ldots, x_p$) se déplace dans E_n ; on suppose que les conditions d'intégrabilité sont vérifiées quand on regarde $x_{n+1}, \ldots, x_p$ comme fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On a ainsi une intégrale de différentielle totale dans la variété E_n. Nous ne considérons que des courbes situées dans cette variété. Le long d'une courbe fermée, l'intégrale précédente aura, en général, une valeur différente de zéro si la courbe ne peut se réduire à un point par une déformation continue. Si l'on considère

$$p_1 - 1$$

courbes fermées ne pouvant former la frontière complète d'une variété à deux dimensions contenue dans E_n, il arrivera, en général (pour une intégrale arbitrairement choisie) que les valeurs de l'intégrale suivant ces courbes ne seront pas liées par une relation homogène et linéaire à coefficients entiers. Au contraire, si nous prenons p_1 courbes fermées, il existera une variété à deux dimensions qui aura ces courbes pour frontière complète. Par suite, en désignant par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{p_1}$ les valeurs de l'intégrale suivant ces courbes, on aura

$$k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2 + \ldots + k_{p_1}\gamma_{p_1} = 0,$$

les k étant des entiers positifs ou négatifs. On voit alors la signification nouvelle que prend le nombre $p_1 - 1$; on peut dire qu'il *représente le nombre des périodes distinctes de l'intégrale* (1), *en entendant par périodes de cette intégrale sa valeur sur une courbe fermée*. Des périodes distinctes sont, bien entendu, des périodes qui ne sont pas liées par une relation homogène et

linéaire à coefficients entiers, et il va de soi que l'intégrale (1) considérée n'est pas une intégrale particulière mais une intégrale arbitrairement choisie sous les conditions indiquées.

Ces considérations se généralisent facilement après ce que nous avons vu dans la Section précédente sur les intégrales multiples dans les espaces à un nombre quelconque de dimensions. Envisageons une intégrale multiple d'ordre m,

$$(2) \qquad \int \cdots \int \sum X_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m} \, dx_{\alpha_1} \, dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_m},$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ désignent m des nombres $1, 2, \ldots, n$. Quant aux X, ce sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_p$; elles restent uniformes et continues quand le point $(x_1, \ldots, x_p)$ se déplace dans la variété E_n. On suppose que les conditions d'intégrabilité relatives à cette intégrale multiple d'ordre m sont vérifiées, quand on regarde $x_{n+1}, \ldots, x_p$ comme fonctions de $x_1, \ldots, x_n$. On a ainsi une intégrale multiple d'ordre m dans l'espace E_n, intégrale dont la valeur ne change pas quand on la prend suivant une variété fermée d'ordre m, qu'on déforme d'une manière continue sans sortir de E_n. Si l'on considère

$$p_m - 1$$

variétés fermées à m dimensions, ne pouvant former la frontière complète d'une variété à $m+1$ dimensions contenue dans E_n, il arrivera, en général, que les valeurs de l'intégrale prises sur ces variétés ne seront pas liées par une relation homogène et linéaire à coefficients entiers. Au contraire, si nous prenons p_m variétés fermées, il existera une variété à $m+1$ dimensions qui aura ces variétés pour frontière complète. Par suite, en désignant par

$$\gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \ldots, \quad \gamma_{p_m}$$

les valeurs de l'intégrale suivant p_m variétés fermées à m dimensions, on aura

$$(3) \qquad k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2 + \ldots + k_{p_m}\gamma_{p_m} = 0,$$

les k étant des entiers positifs ou négatifs.

En définissant précédemment (n° 9) une intégrale multiple d'ordre m sur une variété à m dimensions, nous avons dit que

l'on pouvait trouver deux quantités égales et de signe contraire; nous avons regardé ces deux intégrales comme correspondant à des intégrales prises sur les deux côtés de la variété. En particulier, quand il s'agit d'une variété d'ordre m située dans une variété d'ordre $m+1$, on peut parler, pour cette variété d'ordre m, de normale située dans la variété d'ordre $m+1$, et les deux directions de cette normale correspondent aux deux côtés de la variété d'ordre m supposée simple. Dans le cas qui nous occupe ici, les variétés d'ordre m sont des frontières de la variété d'ordre $m+1$, et l'on peut convenir, pour fixer les idées, que les valeurs désignées par γ représentent les intégrales correspondant à la normale intérieure à la variété d'ordre m. Cela est d'ailleurs sans aucune importance, car il suffirait de changer le signe de l'entier k si l'on faisait une autre convention.

Ainsi, nous venons de donner à l'entier $p_m - 1$ une signification nouvelle; *il représente le nombre des périodes distinctes de l'intégrale* (3) *prise suivant une variété fermée à m dimensions,* et relativement à ce mot *période* nous n'aurions qu'à répéter ici ce que nous avons dit plus haut pour les intégrales simples.

III. — Étude de quelques cas particuliers.

17. Indiquons quelques exemples de multiplicités fermées. Revenons d'abord à une surface fermée à *un* trou dans l'espace ordinaire; soit, dans le plan (x, y), le rectangle R construit sur Ox et Oy avec les côtés ω et ω'. Posons

$$X = f(x, y),$$
$$Y = \varphi(x, y),$$
$$Z = \psi(x, y),$$

f, φ, ψ étant trois fonctions réelles et continues de x et y, et admettant respectivement pour x et y les périodes ω et ω'. Il est évident alors qu'au rectangle R correspond dans l'espace (X, Y, Z) une certaine surface fermée; on peut choisir les fonctions f, φ, ψ, de manière que la surface ne se coupe pas elle-même, et il arrivera, en général, que la surface ne se recouvrira pas elle-même. Au rec-

tangle R correspondra alors une surface qui sera à *un* trou comme un tore.

Au lieu de faire correspondre à un tore un rectangle, on peut lui faire correspondre un ensemble de deux circonférences

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, \qquad x_1'^2 + x_2'^2 = 1.$$

L'ensemble de ces deux courbes forme une variété fermée à deux dimensions, pour laquelle on a évidemment $p_1 = 3$. Toutes les courbes fermées tracées sur cette variété se ramèneront à la courbe obtenue en associant le premier cercle à un point du second, et le second à un point du premier.

Ceci nous conduit à considérer l'ensemble d'une surface sphérique et d'une circonférence

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \qquad x_1'^2 + x_2'^2 = 1.$$

On obtient ainsi une variété fermée à trois dimensions, pour laquelle p_1 et p_2 se calculent facilement. On peut avoir une courbe fermée en prenant un point fixe sur la sphère et en lui associant la circonférence ; quel que soit le point pris sur la sphère, on aura des courbes équivalentes, car on a un continuum à deux dimensions formé par le cercle et une ligne joignant ces deux points, dont la frontière complète est formée par les deux courbes considérées. Je dis que cette courbe est la seule qui donne une période différente de zéro ; il est aisé de voir d'abord qu'elle donne une période différente de zéro ; il suffit de prendre l'intégrale

$$\int d\theta,$$

où θ est l'angle polaire sur le cercle, c'est-à-dire l'intégrale

$$\int \frac{x_2'\,dx_1' - x_1'\,dx_2'}{x_1'^2 + x_2'^2},$$

dont la valeur est égale à 2π sur la circonférence ; on aura donc une période différente de zéro. Je dis qu'elle est la seule. Concevons une ligne fermée quelconque sur le continuum ; si elle est distincte de celle que nous venons de considérer, nous aurons pour une valeur de x_3 un ou plusieurs points de la courbe situés

sur les cercles

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 - x_3^2,$$
$$x_1'^2 + x_2'^2 = 1.$$

Or, le premier de ces cercles peut, sur la sphère S, se réduire à un point, et notre courbe se trouve donc ramenée à une courbe à laquelle correspond un point déterminé de la sphère et le second cercle tout entier, ou seulement un point de ce second cercle. On aura donc seulement une période et, par suite,

$$p_1 = 2.$$

On calcule de même p_2 ; on peut avoir une variété à deux dimensions donnant une période, en associant à un point fixe sur le cercle la sphère tout entière, et l'on démontre, de même que plus haut, que cette période est unique. On a

$$p_2 = 2.$$

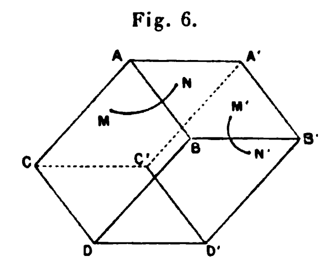
18. Prenons maintenant un parallélélipède P dans l'espace (x, y, z), d'arêtes ω, ω', ω'', et soient $f(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$, $\chi(x, y, z)$ trois fonctions périodiques par rapport à x avec la période ω, par rapport à y avec la période ω', et par rapport à z avec la période ω''. En posant

$$X = f(x, y, z),$$
$$Y = \varphi(x, y, z),$$
$$Z = \psi(x, y, z),$$
$$T = \chi(x, y, z);$$

on aura ainsi, en général, dans l'espace (X, Y, Z, T) une certaine multiplicité M fermée à trois dimensions correspondant, d'une manière uniforme, à P. Il est facile de trouver les nombres p_1 et p_2 correspondant à cette variété. Si l'on joint un point d'une face de P au point homologue de la face opposée, on aura un segment de droite auquel correspond une courbe fermée dans la multiplicité M ; on peut donc, dans celle-ci, tracer trois courbes fermées C auxquelles correspondront des intégrales distinctes. Pour toute autre courbe fermée, la valeur d'une intégrale de différentielle totale sera égale à la somme de multiples des intégrales

prises suivant les courbes C; on le voit de suite en revenant au parallélépipède. Une courbe fermée de M sera représentée, par

Fig. 6.

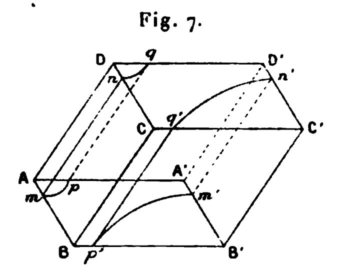


exemple, par deux courbes MN et M′N′, les points M et M′ étant deux points homologues des faces ABCD et A′B′C′D′, et les points N et N′ deux points homologues des faces AA′CC′, BB′DD′. L'intégrale prise suivant la courbe considérée sera égale à la somme des intégrales suivant MM′ et N′N. Nous aurons donc, par conséquent,

$$p_1 - 1 = 3 \quad \text{ou} \quad p_1 = 4.$$

Cherchons la valeur de p_2; si l'on mène trois plans parallèles aux faces du parallélépipède, aux trois parallélogrammes ainsi obtenus correspondront dans M des multiplicités fermées à deux dimensions. Ces trois multiplicités ne limiteront aucune portion

Fig. 7.



de M, comme on le voit de suite et, d'autre part, toute autre variété fermée à deux dimensions se ramènera, par une déformation continue, à une somme de multiples des trois variétés précédentes. Il suffira de considérer la variété à deux dimensions correspondant à la figure ci-dessus, correspondant aux deux portions *mnpq* et *m′n′p′q′*; on aura, comme valeur de l'intégrale, la somme des

intégrales correspondant aux faces AA'DD' et ABCD. Par suite, on a

$$p_2 = 4.$$

19. Donnons maintenant des exemples relatifs à des variétés fermées à quatre dimensions. Considérons la variété fermée à quatre dimensions E_4 définie par les deux équations

$$(S) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,$$
$$(S') \qquad x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 1.$$

Chaque point de cette variété peut être considéré comme obtenu en associant un point M de la sphère (S) à un point M' de la sphère (S'). Proposons-nous de trouver les nombres p_1, p_2, p_3 correspondant à cette variété.

Il est immédiat que l'on aura $p_1 - 1 = 0$. Car une variété fermée à une dimension s'obtient, soit en associant un point de l'une des sphères à une courbe fermée tracée sur l'autre, soit en associant point par point deux courbes fermées tracées respectivement sur ces deux surfaces. Dans tous les cas cette variété peut être réduite à un point.

On voit aussi facilement que $p_3 = 1$. En effet, on peut d'abord obtenir une variété à trois dimensions en associant à chacun des points d'une courbe fermée tracée sur (S) la sphère (S') tout entière, et cette variété peut être réduite à zéro. Plus généralement, à un point (M, x_1, x_2, x_3) d'une variété à trois dimensions appartenant à (S) correspondra sur (S') une courbe fermée C, et quand le point M décrira une courbe fermée sur S, la courbe C après s'être déformée reviendra à son point de départ, en engendrant sur la sphère une portion de surface se recouvrant elle-même, et qui, par suite, est encore réductible à zéro.

La détermination de p_2 est un peu moins immédiate. Si l'on prend un point M' de S' et qu'on lui associe la sphère S, on aura un continuum fermé à deux dimensions, contenu dans E_4; en prenant un point M de S et en lui associant la sphère S', on aura un second continuum fermé. Je dis que par ces deux continuums on ne peut faire passer une variété à trois dimensions ayant ces continuums pour frontière complète; il suffit, pour s'en assurer, de montrer que pour certaines intégrales doubles dans E_4, rem-

plissant les conditions d'intégrabilité, les valeurs sont linéairement indépendantes. Prenons à cet effet l'intégrale

$$\int\int \frac{dx_1\,dx_2}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} + \lambda \int\int \frac{dx'_1\,dx'_2}{\sqrt{1-x'^2_1-x'^2_2}},$$

où λ est une constante arbitraire, pour laquelle la condition d'intégrabilité est vérifiée. Sa valeur prise sur S est égale à 4π; prise sur S', sa valeur est $4\lambda\pi$. Si l'on prend pour λ un nombre incommensurable, on n'aura pas de relation linéaire et homogène à coefficients entiers entre ces deux valeurs, et par suite $p_1 - 1$ sera au moins égal à *deux*.

On pourrait encore raisonner de la manière suivante : Considérons une courbe fermée appartenant à une variété E_3 contenant les deux variétés précédentes. Si elle les rencontre elle devra passer par le point (M, M'), et l'on peut toujours faire en sorte qu'elle n'ait avec ces deux variétés que ce point commun. Donc ces deux variétés ne forment pas frontière sur E_3, et $p_2 - 1$ est au moins égal à *deux*.

Pour montrer que $p_2 - 1$ a effectivement la valeur *deux*, il suffit de remarquer que toute variété fermée à deux dimensions contenue dans E_4 est déterminée soit par un point de S et une surface fermée appartenant à S', qui ne peut être que S' ou une portion de surface se recouvrant elle-même; soit par une courbe fermée contenue dans S à chaque point de laquelle on associe une courbe fermée fixe ou variable tracée sur S'. Dans l'un ou l'autre cas cette variété, si elle ne se réduit pas à l'une des variétés considérées précédemment, se réduit à zéro. Nous n'avons donc que deux variétés distinctes à deux dimensions, et par suite

$$p_2 = 3.$$

20. Un autre exemple très intéressant de variété fermée à quatre dimensions sera obtenu en considérant un parallélépipède dans l'espace (x_1, x_2, x_3, x_4). Soit donc le parallélépipède construit sur les *quatre* axes Ox_1, Ox_2, Ox_3, Ox_4 avec les longueurs ω_1, ω_2, ω_3, ω_4; à ce parallélépipède correspond une variété fermée à quatre dimensions dans l'espace à cinq dimensions. C'est un exemple analogue à ceux traités précédemment n^{os} **17** et **18**. On

voit immédiatement, par des raisonnements analogues à ceux qui ont été faits, que

$$p_1 = p_3 = 5,$$

la généralisation se faisant d'elle-même. Le calcul de p_2 n'avait pas son analogue dans les exemples précédents. Je dis que nous pouvons trouver au moins six continuums fermés à deux dimensions donnant des périodes distinctes; considérons en effet dans l'espace (x_1, x_2, x_3, x_4) l'intégrale double

$$\int \sum A_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

les A étant des constantes : la condition d'intégrabilité sera vérifiée dans ces conditions. Or, considérons le continuum fermé correspondant à x_3 et x_4 constants et à x_1 et x_2 variant respectivement de o à ω_1 et de o à ω_2. La période correspondante est

$$A_{12}\omega_1\omega_2,$$

on aura donc de cette façon, pour l'intégrale ci-dessus, les six périodes

$$A_{ik}\omega_i\omega_k \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)(i \neq k).$$

Nous allons voir maintenant qu'il ne peut y avoir plus de six périodes. Si, en effet, nous considérons d'abord une variété fermée à deux dimensions pour laquelle x_1 soit constant, nous serons ramené au cas de trois dimensions et nous avons une période équivalente aux périodes dans lesquelles i et k sont égaux à un des nombres 2, 3, 4. Supposons que x_1 ne soit pas constant; pour une valeur de x_1, nous aurons dans le continuum considéré à deux dimensions une certaine courbe fermée C que nous pouvons regarder comme tracée dans l'espace à trois dimensions (x_2, x_3, x_4) dans le parallélépipède $(\omega_2, \omega_3, \omega_4)$. Cette courbe C peut être déformée et remplacée par une somme de courbes correspondant à des parallèles aux arêtes du parallélépipède $(\omega_2, \omega_3, \omega_4)$; on devra ensuite faire varier x_1, et, si l'on a une période différente de zéro, il faudra nécessairement que x_1 varie entre o et ω_1, et l'on ne retrouve que les périodes précédentes. Par conséquent

$$p_2 = 7.$$

21. Comme troisième exemple de variété fermée à quatre dimensions, considérons celle qui serait définie en associant un point d'une surface (S) à p trous dans l'espace (x_1, x_2, x_3) à un point d'une surface (S') à p' trous dans l'espace (x'_1, x'_2, x'_3).

Nous obtiendrons toutes les variétés à une dimension en associant d'abord à chaque point de (S) une courbe fermée de (S'). Or il existe sur cette dernière $2p'$ courbes qui ne peuvent se réduire à zéro, et qui, prises ensemble, ne forment pas une frontière complète. En associant un point de (S') à une courbe fermée de (S) on trouve $2p$ nouvelles courbes irréductibles; donc $p_1 \geqq 2p + 2p' + 1$. D'ailleurs toute autre variété fermée qui ne se réduit pas à zéro est une somme des variétés précédentes affectées au besoin d'un coefficient n entier. Par suite $p_1 = 2p + 2p' + 1$.

Relativement à p_2 on obtient de suite $4pp' + 2$ variétés ne formant pas de frontière séparément, à savoir d'abord les deux variétés obtenues en associant à un point de (S) la surface (S') tout entière et réciproquement. On peut ensuite associer à chacune des $2p$ courbes que l'on peut tracer sur S chacune des $2p'$ courbes que l'on peut tracer sur S', ce qui donne $4pp'$ variétés, et l'on en conclut

$$p_2 - 1 = 4pp' + 2$$

et par suite, on a

$$p_2 = 4pp' + 3.$$

IV. — Sur une propriété des multiplicités fermées.

Dans les variétés fermées que nous venons d'étudier, une circonstance remarquable s'est présentée. Pour les variétés à trois dimensions que nous avons considérées on avait

$$p_1 = p_2$$

et pour les variétés à quatre dimensions

$$p_1 = p_3.$$

22. C'est là un cas particulier d'un théorème général dont l'énoncé est que : *Pour une variété fermée, les nombres de Betti également distants des extrêmes sont égaux*. Ainsi, en désignant par E_n une variété fermée d'un nombre quelconque de dimensions,

on a d'une manière générale

$$p_n = p_{n-m}.$$

Nous allons démontrer ce théorème pour $m = 1$, mais faisons d'abord quelques remarques générales relatives à l'intersection de deux variétés fermées. Dans ce qui suit nous désignerons par le symbole (V_i) un groupe de variétés d'ordre i.

23. Deux variétés fermées V_{n-h}, V_{n-k} comprises dans E_n se couperont en général suivant une variété d'ordre $n - h - k$, mais cet ordre pourra être plus élevé si elles appartiennent toutes deux à une variété V_m comprise dans E_n.

On en conclut que, dans une variété E_n, on pourra toujours disposer des variétés V_i et V_k de manière qu'elles ne se coupent pas, si la somme $i + k$ est inférieure à n.

Si l'on considère un certain nombre de variétés de mêmes dimensions comprises dans E_n, soit V_m^1, V_m^2, ..., on peut toujours, au moyen de ces variétés, en former une seule, en les réunissant deux à deux par une variété du même ordre dont toutes les dimensions, sauf une, sont très petites.

24. Deux variétés du même ordre V_m^1 et V_m^2 comprises dans E_n ont en général comme intersection un groupe de variétés (V'), dont l'ordre est au plus égal à $m - 1$. Ce groupe formera frontière si les deux variétés V_m^1 et V_m^2 appartiennent à une même variété W_{m+1} sur laquelle l'une d'elles, soit V_m^1, forme frontière : en effet toute courbe fermée appartenant à W_{m+1} et en particulier à V_m^2 doit couper V_m^1 et par suite (V') en un nombre pair de points. Ainsi, lorsqu'une variété V_m ne forme pas frontière dans E_n, elle ne peut être considérée comme l'intersection unique de deux variétés fermées formant frontière, comprises dans E_n : elle ne peut être que l'intersection unique de deux variétés ne formant pas frontière.

Nous admettrons que, dans une variété E_n, on puisse toujours, en vertu de la continuité et de la connexion linéaire, considérer une variété V_1 comme l'intersection commune unique de $n - 1$ variétés V_{n-1} contenues dans E_n. C'est ainsi que, dans l'espace à trois dimensions, on peut toujours, en général, par une

courbe faire passer deux surfaces qui ne se coupent que suivant cette courbe.

D'une manière générale, on peut toujours supposer qu'une variété V_i est l'intersection commune unique de $n-2i+1$ variétés V_{n-i} comprises dans E_n. En effet si, par la variété V_i, on suppose menées k variétés V_{n-i}, elles se couperont, en général, suivant une variété d'ordre $n-ki$; on pourra faire en sorte qu'elles ne se coupent que suivant V_i si $n-ki < i$, c'est-à-dire si $k > \frac{n-i}{i}$. Or, on a $n-2i+1 > \frac{n-i}{i}$, du moment que i est moindre que $\frac{n}{2}$.

25. Considérons encore une variété V_1 qui, comme nous venons de le dire, peut être considérée comme l'intersection commune de $n-1$ variétés V_{n-1}. *Je dis que, si toutes ces variétés forment frontière, la variété* V_1 *formera frontière.* Soient

$$V_{n-1}^1, \quad V_{n-1}^2, \quad \ldots, \quad V_{n-1}^{n-1}$$

nos $n-1$ variétés, et envisageons les intersections de la première de ces variétés avec toutes les autres. Nous obtiendrons ainsi $n-2$ groupes de variétés V_{n-2}, qui n'auront en commun que la variété V_1, et chacun d'eux formera frontière sur E_n. En continuant ainsi de proche on voit que, finalement, V_1 pourra être considéré comme l'intersection commune de deux groupes de variétés V_2,

$$(V_2^1), \quad (V_2^2),$$

qui forment respectivement frontière sur E_n. D'ailleurs, une des variétés V_2^1 ne peut avoir en commun, avec le groupe des autres (V_2^2) que la variété V_1; donc, toute courbe fermée tracée sur V_2^1 doit couper (V_2^2) et, par suite, V_1, en un nombre pair de points, et la proposition est établie.

Au lieu d'une seule variété V_1, on aurait pu considérer un groupe de ces variétés, et la conclusion est encore la même.

Plus généralement, si l'on envisage un groupe de variétés $V_i \left(i \leqq \frac{n}{2}\right)$ comme l'intersection commune à $n-2i+1$ variétés

$$V_{n-i}^1, \quad V_{n-i}^2, \quad \ldots, \quad V_{n-i}^\lambda \qquad (\lambda = n-2i+1),$$

on démontre, sans changer en rien du raisonnement précédent, que, *si toutes ces variétés forment frontière, le groupe des variétés* V_i *formera frontière.*

La conclusion finale de cette proposition est que, *si un groupe de variétés* V_i *ne forme pas frontière, l'une au moins des variétés* V_{n-i} *qui le contient ne forme pas frontière.*

26. Ces préliminaires étant posés, proposons-nous de démontrer l'égalité

$$p_1 = p_{n-1}.$$

Il est d'abord très facile de voir qu'entre p_1 et p_{n-1} existe la relation

$$p_1 \geqq p_{n-1}.$$

Considérons, en effet, les $p_{n-1} - 1 = \lambda$ variétés d'ordre $n-1$,

$$V_{n-1}^1, \quad V_{n-1}^2, \quad \ldots, \quad V_{n-1}^\lambda,$$

qui ne forment pas frontière sur E_n. On pourra passer, par une courbe continue C^i, d'un point situé d'un côté de la variété V_{n-1}^i à un point situé de l'autre côté, sans rencontrer aucune des autres variétés V_{n-1}. Soient

$$C^1, \quad C^2, \quad \ldots, \quad C^\lambda$$

les λ courbes que l'on peut ainsi tracer pour chacune des λ variétés V_{n-1}. Par les courbes C, on pourra faire passer une variété fermée à deux dimensions, soit V_2, comprise dans E_n. Chacune des variétés V_{n-1} coupera cette surface suivant au moins une courbe, dont l'une, que je désigne par Γ^i pour la variété V_{n-1}^i, passe par le point correspondant. Il est clair que Γ^i ne rencontre C^i qu'en un seul point. Donc les C^i ne forment pas frontière sur V_2, c'est-à-dire sur toute surface fermée qui les contient, et par suite sur E_n. On en conclut

$$p_1 \geqq p_{n-1}.$$

27. Nous allons montrer que, réciproquement, on a

$$p_{n-1} \geqq p_1.$$

C'est la conclusion presque immédiate du lemme du n° 25. Soient

$$V_1^1, V_1^2, \ldots, V_1^\lambda \qquad (\lambda = p_1 - 1)$$

les $p - 1$ variétés qui ne forment pas frontière sur E_n. Considérons deux de ces variétés V_1^1 et V_1^2. Par chacune d'elles passe au moins une variété V_{n-1} qui ne forme pas frontière. Mais, si l'on considère le groupe des variétés V_{n-1} qui ont V_1^1 en commun, et le groupe des variétés V_{n-1} qui ont V_1^2 en commun, il y aura au moins deux de ces variétés, une dans chaque groupe, qui, prises ensemble, ne formeront pas frontière, car, s'il en était autrement, on pourrait, au moyen des variétés des deux premiers groupes, former un troisième groupe de variétés dont chaque élément formerait frontière, et qui auraient en commun les deux variétés V_1 et V_2 ne formant pas frontière, ce qui est impossible. En continuant de proche en proche le même raisonnement, on en conclut

$$p_{n-1} \geqq p_1;$$

d'où l'égalité

$$p_{n-1} = p_1.$$

Dans son Mémoire sur l'*Analysis situs,* que nous avons cité plus haut, M. Poincaré a donné une démonstration générale de l'égalité $p_m = p_{n-m}$ (p. 33 à 46). Sa démonstration repose sur des considérations entièrement différentes, mais peut-être plusieurs points auraient-ils besoin d'être complétés. Aussi, avons-nous suivi une autre voie, mais nous avons dû nous limiter au cas de $m = 1$.

CHAPITRE III.

DES INTÉGRALES DE FONCTIONS RATIONNELLES DE DEUX VARIABLES COMPLEXES.

I. — Des intégrales doubles de fonctions de deux variables complexes. Extension du théorème de Cauchy, d'après M. Poincaré.

1. En désignant par $F(x, y)$ une fonction analytique de deux variables complexes x et y, cherchons d'abord ce que l'on doit entendre par l'intégrale double

$$\iint F(x,y)\,dx\,dy. \tag{1}$$

Cette expression n'a en elle-même aucun sens, mais il n'y a aucune hésitation à avoir sur la définition à adopter. Posons

$$x = x_1 + i x_2, \qquad y = x_3 + i x_4$$

et considérons x_1, x_2, x_3, x_4 comme fonctions de deux paramètres u et v; soit A une certaine aire dans le plan (u, v). L'intégrale

$$\iint F(x,y)\,\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\,du\,dv$$

sera, par définition, la valeur de l'intégrale (1) étendue à la portion de la *surface* de l'espace à quatre dimensions (x_1, x_2, x_3, x_4) qui correspond à l'aire A du plan (u, v). Si l'on permute x et y, on aura une seconde intégrale égale et de signe contraire; d'après nos conventions antérieures sur les intégrales multiples des espaces à un nombre quelconque de dimensions, nous regardons cette seconde intégrale comme étendue à l'autre côté de la surface.

Mettons en évidence la partie réelle et la partie imaginaire de l'intégrale; en remplaçant x et y par leurs valeurs, et posant

$$F = P + iQ,$$

on obtient

$$\iint (\mathrm{P} + i\mathrm{Q}) \left\{ \frac{\mathrm{D}(x_1, x_3)}{\mathrm{D}(u, v)} - \frac{\mathrm{D}(x_2, x_4)}{\mathrm{D}(u, v)} + i \left[\frac{\mathrm{D}(x_2, x_3)}{\mathrm{D}(u, v)} + \frac{\mathrm{D}(x_1, x_4)}{\mathrm{D}(u, v)} \right] \right\} du\, dv$$

Nous avons donc, pour la partie réelle et pour le coefficient de i, les deux intégrales de surface

$$\iint \mathrm{P}(dx_1\,dx_3 - dx_2\,dx_4) - \mathrm{Q}(dx_2\,dx_3 + dx_1\,dx_4),$$

$$\iint \mathrm{Q}(dx_1\,dx_3 - dx_2\,dx_4) + \mathrm{P}(dx_2\,dx_3 + dx_1\,dx_4),$$

intégrales de même forme que celles qui ont été étudiées au Chapitre Ier (n° 11). Ceci étant bien compris, cherchons avec M. Poincaré si l'on peut étendre, à ces intégrales doubles, le théorème fondamental de Cauchy. En d'autres termes, *l'intégrale double ci-dessus reste-t-elle invariable quand on déforme la surface d'intégration en la faisant toujours passer par le même contour?*

Nous allons voir que la réponse est affirmative, c'est-à-dire que les conditions trouvées au paragraphe précédent sont vérifiées. Prenons la première de ces intégrales

$$\iint \mathrm{P}(dx_1\,dx_3 - dx_2\,dx_4) - \mathrm{Q}(dx_2\,dx_3 + dx_1\,dx_4).$$

Si nous l'écrivons, comme plus haut, sous la forme

$$\iint \Sigma \mathrm{A}_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

on doit poser

$$\mathrm{A}_{13} = -\mathrm{A}_{31} = \frac{\mathrm{P}}{2},$$

$$\mathrm{A}_{24} = -\mathrm{A}_{42} = -\frac{\mathrm{P}}{2},$$

$$\mathrm{A}_{23} = -\mathrm{A}_{32} = -\frac{\mathrm{Q}}{2},$$

$$\mathrm{A}_{14} = -\mathrm{A}_{41} = -\frac{\mathrm{Q}}{2},$$

et tous les autres A sont nuls.

Or, nous avons ici *quatre* conditions à vérifier, puisque *qu*



est le nombre de combinaisons de quatre lettres trois à trois. Soit d'abord la condition

$$\frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{31}}{\partial x_2} = 0,$$

elle se réduit à

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} + \frac{\partial P}{\partial x_2} = 0,$$

et cette condition est vérifiée puisque $P + iQ$ est une fonction analytique de $x_1 + ix_2$. Prenons encore

$$\frac{\partial A_{12}}{\partial x_4} + \frac{\partial A_{24}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{41}}{\partial x_2} = 0.$$

Elle se réduit à

$$-\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} = 0,$$

condition qui est également satisfaite. On s'assurera de la même manière que les deux conditions restantes sont vérifiées. Il en est aussi de même pour la seconde intégrale : nous pouvons donc affirmer que *le théorème de Cauchy s'étend aux intégrales doubles*.

2. Le théorème de M. Poincaré, que nous venons d'établir, peut, comme dans le cas d'une seule variable, s'énoncer sous une autre forme. Considérons dans l'espace à quatre dimensions (x_1, x_2, x_3, x_4) une surface fermée; une telle surface, par exemple, pourra être obtenue en prenant

$$x_i = \varphi_i(u, v), \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

les φ étant des fonctions de u et v, périodiques par rapport à u et par rapport à v. Supposons que cette surface se déforme d'une manière continue et puisse ainsi être réduite à un point ou à une ligne de telle manière que, pour l'ensemble des valeurs de x et y rencontrées par la surface pendant cette déformation, la fonction F ne cesse d'être bien déterminée et continue. La valeur de l'intégrale ne changera pas pendant cette déformation; elle ne pourra donc être que zéro, puisque l'aire de la surface d'intégration tend vers zéro. Nous pouvons donc dire que, sous les condi-

tions indiquées, *l'intégrale double*

$$\int\int F(x, y)\, dx\, dy,$$

étendue à une surface fermée, est nulle.

II. — Des résidus des intégrales doubles de fonctions rationnelles [1].

3. Si une *surface* fermée ne peut être réduite à un point ou à une courbe, par une déformation continue, sans rencontrer des systèmes de valeurs de x et de y, pour lesquelles $F(x, y)$ devienne infinie ou indéterminée, la valeur de l'intégrale pourra être différente de zéro : on appelle alors cette valeur un *résidu* de l'intégrale double. Dans ce qui va suivre, nous nous bornerons au cas où le continuum d'intégration reste tout entier à distance finie.

Prenons d'abord un exemple très simple; soit l'intégrale

$$\int\int \frac{P(x, y)}{xy}\, dx\, dy,$$

$P(x, y)$ étant une fonction holomorphe de x et y dans le voisinage de $x = 0$, $y = 0$. Je considère la surface définie par les deux équations

$$x = Re^{ui}, \qquad y = R'e^{vi},$$

les paramètres réels u et v variant de 0 à 2π : c'est une *surface fermée*. La valeur de l'intégrale sur cette surface est

$$-\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} P(Re^{ui}, R'e^{vi})\, du\, dv,$$

dont la valeur est manifestement

$$-4\pi^2 P(0, 0).$$

On aurait pu prendre, comme surface d'intégration, l'ensemble

---

[1] La notion de résidu des intégrales doubles de fonctions rationnelles est due à M. Poincaré (Sur les résidus des intégrales doubles, *Acta mathematica*, t. IX). Le point de vue auquel nous nous plaçons ici est celui qui a été adopté par M. Picard, dans son Mémoire sur les fonctions algébriques de deux variables (*Journal de Mathématiques*, 1889), dans le tome II de son *Traité d'Analyse* (p. 256), et dans le tome CXXIV des *Comptes rendus*.

de deux courbes fermées C et C′ entourant une fois l'origine dans les plans respectifs des variables x et y. Le résultat aurait été le même. Suivant le sens d'intégration sur les deux courbes C et C′, on peut obtenir des résultats de signes différents.

L'intégrale double

$$\iint \frac{P(x,y)}{x^m y^n}\, dx\, dy$$

nous donne, dans les mêmes conditions,

$$-\frac{1}{R^{m-1}R'^{n-1}} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} P(Re^{ui}, R'e^{vi})\, e^{-(m-1)ui}\, e^{-(n-1)vi}\, du\, dv,$$

et, en développant $P(x,y)$ suivant les puissances de x et y, il restera simplement, comme valeur de l'intégrale,

$$-\frac{4\pi^2}{(m-1)!\,(n-1)!}\left(\frac{\partial^{m+n-2}P}{\partial x^{m-1}\,\partial y^{n-1}}\right)_{\substack{x=0\\ y=0}}.$$

4. Présentons immédiatement quelques considérations générales. Soit l'intégrale

$$\iint \frac{P(x,y)}{A(x,y)}\, dx\, dy,$$

P et A étant deux polynomes en x et y, réductibles ou irréductibles. Pour une valeur donnée à y, l'équation en x

$$A(x,y) = 0$$

a un certain nombre de racines. Traçons dans le plan de la variable x un contour fermé C contenant à son intérieur un certain nombre de racines

$$x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_\alpha$$

de l'équation précédente. Quand y varie d'une manière continue, les x varient d'une manière continue; déformons en même temps d'une manière continue le contour C de manière que les racines $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha$ restent toujours à son intérieur et que les racines de l'équation A, primitivement extérieures à C, lui restent toujours extérieures. Supposons que la variable y décrive alors dans son plan un contour fermé Γ tel que, quand elle revient au point de départ, les racines $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha$ reprennent la même valeur ou soient seulement permutées entre elles, et que le con-

tour C puisse à l'arrivée reprendre la même position qu'au départ. Dans ces conditions, l'ensemble des courbes C, correspondant aux divers points de Γ, peut être regardé comme formant un continuum *fermé* à deux dimensions dans l'espace à quatre dimensions. La fonction rationnelle

$$\frac{P(x,y)}{A(x,y)}$$

reste finie pour tous les points de cette surface, et la valeur correspondante de l'intégrale double est en général différente de zéro.

5. Faisons une première application de ces généralités. Nous envisageons l'intégrale

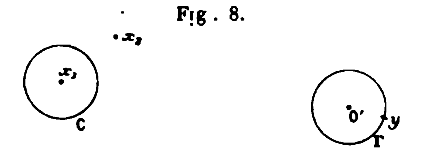
$$\iint \frac{P(x,y)}{Q(x,y)R(x,y)}\,dx\,dy,$$

Q et R étant deux polynomes, et nous supposons que le point $x = 0$, $y = 0$ soit un point simple de rencontre des deux courbes $Q = 0$ et $R = 0$. Pour une valeur de y voisine de zéro, l'équation $Q = 0$ a une racine x_1 voisine de zéro, et l'équation $R = 0$ une racine x_2 voisine de zéro, de telle sorte que

$$Q(x_1,y) = 0, \qquad R(x_2,y) = 0.$$

Prenons comme courbe C une courbe dans le plan des x entou-

Fig. 8.



rant x_1 et laissant x_2 à son extérieur. Quand la variable y décrit autour de l'origine une courbe fermée Γ suffisamment petite, les points x_1 et x_2 reviennent à la fin à leur position initiale, et si C, en se déformant, reste suffisamment rapproché de x_1, il laissera toujours x_2 à son extérieur. On peut par exemple supposer, si l'on veut, que C est un cercle de rayon assez petit, ayant x_1 pour centre.

Cherchons la valeur de l'intégrale prise le long de la surface

fermée correspondant à Γ et à l'ensemble des courbes C. Laissant d'abord y constant, nous avons à prendre, dans le plan des x, l'intégrale

$$\int_C \frac{P(x,y)}{Q(x,y)\,R(x,y)}\,dx.$$

Il faut donc calculer le résidu par rapport à x_1 de la fonction rationnelle

$$\frac{P(x,y)}{Q(x,y)\,R(x,y)}.$$

Nous avons, pour valeur de cette première intégrale,

$$2\pi i \frac{P(x_1,y)}{Q'_x(x_1,y)\,R(x_1,y)},$$

et il faut prendre maintenant dans le plan des y

$$2\pi i \int_\Gamma \frac{P(x_1,y)}{Q'_x(x_1,y)\,R(x_1,y)}\,dy.$$

Au dénominateur, $R(x_1, y)$ est une fonction de y s'annulant pour $y = 0$. Or, le résidu pour $y = 0$ de la fonction sous le signe d'intégration est

$$\frac{P(0,0)}{Q'_x(0,0)\left[\frac{d}{dy}R(x_1,y)\right]_{y=0}}.$$

Or

$$\frac{d}{dy}R(x_1,y) = \frac{\partial R}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dy} + \frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{\partial R}{\partial x_1}\frac{\frac{\partial Q}{\partial y}}{\frac{\partial Q}{\partial x_1}} + \frac{\partial R}{\partial y}.$$

On trouve donc, pour la valeur de l'intégrale,

$$-4\pi^2 \frac{P(0,0)}{\left(\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}}}.$$

Il est aisé de vérifier que si l'on avait pris un contour C enveloppant les deux racines x_1 et x_2, la valeur de l'intégrale aurait été nulle.

6. Un cas présentant une grande analogie avec celui qui vient

de nous occuper est celui où l'on aurait l'intégrale

$$\iint \frac{P(x,y)}{A(x,y)} dx\, dy,$$

la courbe $A(x,y)=0$ ayant un point double à l'origine. Nous avons pour y voisin de zéro deux racines x_1 et x_2; nous considérons les mêmes courbes que plus haut. On a alors à calculer

$$2\pi i \int_\Gamma \frac{P(x_1,y)}{A'_x(x_1,y)} dy.$$

Le résidu de la fonction sous le signe d'intégration est

$$\frac{P(0,0)}{\left(A''_{x^2}\frac{dx_1}{dy}+A''_{xy}\right)_{y=0}}.$$

Or, pour $y=0$, $\frac{dx_1}{dy}$ satisfait à l'équation du second degré

$$A''_{x^2}\left(\frac{dx_1}{dy}\right)^2+2A''_{x,y}\left(\frac{dx_1}{dy}\right)+A''_{y^2}=0,$$

et l'on trouve alors de suite pour valeur de l'intégrale

$$-4\pi^2\frac{P(0,0)}{\left[\sqrt{(A''_{xy})^2-A''_{x^2}A''_{y^2}}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}}.$$

Ceci suppose que l'on n'a pas un point de rebroussement. Dans ce cas, les deux racines x_1 et x_2 se permutent quand y tourne autour de l'origine, et pour que la *surface* considérée soit fermée, il faut que y tourne deux fois autour de l'origine. On a alors à prendre l'intégrale

$$2\pi i \int \frac{P(x_1,x)}{A'_x(x_1,y)} dy$$

le long d'une courbe entourant deux fois l'origine, et l'intégrale est nécessairement nulle.

7. Après ces exemples, revenons aux considérations générales du n° 4. Le cas le plus simple serait celui où le contour C ne contiendrait qu'une seule racine x_1 à son intérieur; il faudrait alors que le contour Γ du plan des y fût un cycle pour la racine x_1

de l'équation

$$A(x_1, y) = 0,$$

de telle sorte que x_1 revienne à sa valeur initiale quand y décrit Γ. En intégrant d'abord, en laissant y constant, nous avons

$$2\pi i \frac{P(x_1, y)}{A'_x(x_1, y)},$$

et l'intégrale cherchée est égale à

$$2\pi i \int_\Gamma \frac{P(x_1, y)}{A'_x(x_1, y)} dy.$$

Elle est donc égale à une période d'une intégrale abélienne relative à la courbe $A(x, y) = 0$ *ou à une de ses courbes composantes, dans le cas où* A *serait réductible.*

Soit maintenant d'une manière générale

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_\mu$$

un ensemble de racines situées dans C et se permutant les unes dans les autres quand y décrit Γ. Nous pouvons substituer à C un certain nombre de courbes fermées de telle sorte que chacune d'elles ne contienne que des racines se permutant *circulairement* les unes dans les autres, et notre surface primitive sera ainsi remplacée par un certain nombre de surfaces plus simples. Il suffira de considérer l'une d'elles, et de supposer par conséquent que C' ne renferme que $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$, en admettant que celles-ci se permutent circulairement. Nous aurons comme valeur de l'intégrale

$$(2) \qquad 2\pi i \int_\Gamma \left(\frac{P(x_1, y)}{A'_x(x_1, y)} + \frac{P(x_2, y)}{A'_x(x_2, y)} + \ldots + \frac{P(x_\mu, y)}{A'_x(x_\mu, y)} \right) dy.$$

Or, d'autre part, la courbe Γ parcourue μ fois formera évidemment un cycle pour la racine x_1; formons alors l'intégrale

$$2\pi i \int \frac{P(x, y)}{A'_x(x, y)} dy$$

le long du cycle ainsi défini. La valeur de cette intégrale sera égale à l'expression (2), les différents termes de cette expression

correspondant aux différents tours faits sur la courbe Γ. *Nous retrouvons donc encore, comme plus haut, une période d'intégrale abélienne.*

Prenons, comme application, l'intégrale double

$$\iint \frac{dx\,dy}{x^3+y^3-1}. \tag{3}$$

On formera l'intégrale simple

$$\frac{2\pi i}{3}\int \frac{dy}{x^2},$$

x étant lié à y par la relation

$$x^3 = 1 - y^3.$$

Les deux périodes de cette intégrale elliptique de première espèce seront les résidus de l'intégrale double (3).

8. Nous venons d'indiquer une classe très étendue de surfaces fermées pour lesquelles la valeur correspondante de l'intégrale double se ramène à une période, polaire ou cyclique, d'une intégrale abélienne. On peut se demander si *la valeur de l'intégrale double d'une fraction rationnelle*

$$\iint \frac{P(x,y)}{A(x,y)}\,dx\,dy,$$

prise suivant une surface fermée arbitraire, assujettie seulement à ne pas rencontrer le continuum défini par l'équation

$$A(x,y) = 0,$$

se ramènera à une somme de multiples des valeurs que nous venons de trouver. La réponse est affirmative, et c'est ce théorème que nous allons établir.

Si l'on pose $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$, toute surface à deux dimensions sera représentée par deux relations entre

$$x_1, \quad x_2, \quad y_1, \quad y_2.$$

Nous supposons que le champ d'intégration ne corresponde pas à x arbitraire, y restant constant, auquel cas l'intégrale serait nulle.

Nous admettons aussi que le polynome $A(x, y)$ et ses divers facteurs irréductibles (s'il est réductible) contiennent simultanément x et y, comme on peut toujours le supposer, en ayant fait préalablement une substitution linéaire.

Pour une valeur donnée à y_2, l'équation

$$A(x, y) = 0,$$

ou, ce qui revient au même, les deux équations

$$\begin{aligned} A_1(x_1, x_2, y_1, y_2) &= 0 \\ A_2(x_1, x_2, y_1, y_2) &= 0 \end{aligned} \qquad [A(x, y) = A_1 + iA_2]$$

définissent un ensemble de valeurs de x_1, x_2, y_1 que l'on peut regarder comme représentant un certain nombre de courbes gauches α dans l'espace à trois dimensions (x_1, x_2, y_1). Chaque plan

$$y_1 = \text{const.}$$

rencontre les courbes α en un certain nombre de points toujours en même nombre, à savoir : le nombre des racines de l'équation $A(x, y) = 0$ pour une valeur arbitraire donnée à y. Sauf pour certaines valeurs de y_2 en nombre fini, l'ensemble des courbes α ne présente pas de points multiples; les valeurs de y_2, pour lesquelles cet ensemble a un point multiple, correspondent aux coefficients de i dans les valeurs de y pour lesquelles l'équation $A(x, y) = 0$ a une racine multiple.

Ceci posé, revenons à notre surface fermée S d'intégration conçue tout à fait d'une manière générale. La surface étant tout entière à distance finie, il n'y aura de points de la surface que pour des valeurs de y_2 comprises entre deux certaines limites a_1 et a_2 $(a_1 < a_2)$. Quand y_2 en croissant devient égale à a_1, une courbe correspondante commence à paraître sur S. Deux cas peuvent se présenter : ou bien cette courbe se réduit à un point, ou elle est la limite de deux courbes qui sont venues se confondre; dans toute autre hypothèse la surface ne serait pas fermée. La courbe ne peut d'ailleurs, pour $y_2 = a_1$, se réduire à un point si l'on veut que l'intégrale soit différente de zéro, car pour y_2 arbitraire la courbe correspondante, extension de ce point, ne tournerait pas autour des courbes α, et l'on pourrait, par une déformation continue, réduire

à zéro, sans rencontrer aucune singularité, une portion fermée de la surface. Nous avons donc pour $y_2 = a_1$ une certaine courbe, enveloppant quelques-unes des lignes α; quand y_2 croît, cette courbe se dédouble, et l'on a ainsi pour y_2 arbitraire des couples de courbes qui, pendant la variation continue de y_2, ne peuvent disparaître que deux par deux en venant à coïncider. Nous désignerons par C une de ces courbes correspondant à une valeur d'ailleurs quelconque de y_2.

Considérons alors une courbe C et les lignes α qui correspondent à la même valeur de y_2. Par cette courbe C faisons passer une surface Σ ayant C pour contour. Cette surface rencontrera une ou plusieurs lignes α; soient M ces points de rencontre. Une déformation continue de C permettra, en supprimant des lignes parcourues deux fois en sens inverse, de la réduire à de petites courbes entourant les points M. On pourra ensuite déplacer ces dernières courbes de manière qu'elles soient chacune dans un plan

$$y_1 = \text{const.},$$

toutes ces réductions et tous ses déplacements s'effectuant d'ailleurs sans traverser les lignes α.

De cette façon nous avons remplacé la surface initiale S par un certain nombre de surfaces engendrées par une petite courbe située dans un plan

$$y_1 = \text{K},$$

K étant une constante, qui varie avec y_2 suivant une loi en grande partie arbitraire. Chacune de nos nouvelles surfaces rentre dans le type des surfaces étudiées au numéro précédent; l'ensemble des valeurs de y_2 et de y_1 donne sur le plan de la variable y une courbe fermée, et à chaque point de cette courbe fermée correspond une petite courbe dans le plan de la variable x. *Le théorème est donc établi.*

On pourrait encore l'établir de la manière suivante. Nous avons désigné par a_1 et a_2 les valeurs entre lesquelles varie y_2; soient pareillement b_1 et b_2 les valeurs entre lesquelles varie y_1. Quand y_2 va en croissant de a_1 à a_2, chacune des courbes α engendre une portion de surface, et l'on a ainsi autant de *lames* de surface qu'il y a de racines. Ces lames ne se coupent pas et se

touchent seulement aux points qui correspondent aux racines multiples. L'intersection de cette portion de surface par un plan $y_1 = K$ se compose donc d'autant de portions de courbe β qu'il y a de racines, ces courbes ne se coupant pas et pouvant seulement être tangentes.

Revenons maintenant à notre surface d'intégration. A chaque valeur de y_2 correspondront une ou plusieurs courbes fermées C dans l'espace x_1, x_2, y_1, et l'ensemble de ces courbes déterminera une surface fermée S complètement comprise entre les plans $y_1 = b_1, y_1 = b_2$. Cette surface pourra couper une ou plusieurs des lames de A définies précédemment, mais elle ne pourra en traverser complètement aucune. Envisageons en effet une courbe d'intersection de S avec une des lames de A. Sur cette courbe, considérée comme appartenant à A, y_2 varie de a_1 à a_2, et considérée comme appartenant à S, y_2 varie entre des limites au plus égales. Si donc l'intersection était complète, il existerait au moins sur la surface d'intégration un point appartenant à A.

La surface S possède donc un certain nombre de trous, par lesquels passent une ou plusieurs lames ou portions de lames de A et l'on conçoit que l'on puisse, par une déformation continue, substituer à la surface S une nouvelle surface à trous, tangente aux plans $y_1 = b_1, y_1 = b_2$, et par lesquels passeront entièrement une ou plusieurs lames de surface A.

On peut donc considérer la surface d'intégration comme définie par deux équations de la forme

$$P_1(x_1, x_2, y_1) = 0, \qquad P_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0;$$

c'est-à-dire qu'elle est située dans l'espace x_1, x_2, y_1, y_2 sur une sorte de cylindre indéfini, $P_1(x_1, x_2, y_1) = 0$, qui ne rencontre pas la portion de A définie plus haut. On peut alors, par une seconde déformation continue de la surface d'intégration sur ce cylindre, lui substituer une nouvelle surface définie par des équations de la forme

$$P_1(x_1, x_2, y_1) = 0, \qquad P'_2(y_1, y_2) = 0,$$

ce qui suffit pour établir le théorème énoncé.

Il est donc démontré que *tout résidu de l'intégrale double*

$$\iint \frac{P(x, y)\,dx\,dy}{A(x, y)}$$

peut être regardé comme une période logarithmique ou cyclique d'une intégrale abélienne.

9. Considérons, comme application, une intégrale double étudiée il y a longtemps déjà par Didon [*Sur une formule de Calcul intégral* (*Annales de l'École Normale*, 1873)]. Ce géomètre, guidé sans doute par la pensée de trouver le nombre des racines communes à deux équations simultanées

$$f(x, y) = 0, \qquad \varphi(x, y) = 0,$$

racines pour lesquelles l'x fût compris dans un certain contour C du plan des x, tandis que l'y devait être à l'intérieur d'un contour C' du plan des y, considéra l'intégrale double

$$(4) \qquad \int_C \int_{C'} \frac{\Delta\,dx\,dy}{f\varphi},$$

où $\Delta = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, la variable x décrivant C et la variable y décrivant C'. On suppose, bien entendu, qu'il n'y a pas de système (x, y) annulant soit f, soit φ pour lequel x soit sur C et y sur C'. Cette intégrale offre évidemment une certaine analogie avec l'intégrale de Cauchy

$$\int_C \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f}\,dx,$$

qui est égale au produit par $2\pi i$ du nombre des racines contenues dans C.

Didon démontre que l'intégrale (4) est égale au produit de $(2\pi i)^2$ par un nombre entier, mais ici ce nombre entier n'a en général aucune relation avec le nombre des racines communes aux deux équations. Au point de vue où nous sommes placés, le résultat de Didon devient évident, et l'on peut même lui donner

une forme plus générale en considérant l'intégrale double

$$\int\int \frac{\Delta\, dx\, dy}{f\varphi},$$

étendue à une surface fermée quelconque à deux dimensions S de l'espace à quatre dimensions, pourvu que sur cette surface $f\varphi$ soit toujours différent de zéro. Posons

$$f(x, y) = X,$$
$$\varphi(x, y) = Y;$$

à la surface S de l'espace à quatre dimensions (x, y) correspond une surface fermée Σ de l'espace (X, Y); on a donc à considérer l'intégrale double

$$\int\int \frac{dX\, dY}{XY}.$$

Or tous les résidus de cette intégrale double sont égaux à un multiple de $(2\pi i)^2$; on a donc pour valeur de l'intégrale (4) une expression nécessairement de la forme

$$-4\pi^2 p,$$

p étant un entier positif ou négatif.

Il serait facile de démontrer directement ce résultat sans recourir à aucune théorie sur les intégrales de fonctions de deux variables complexes; c'est ce que fait Didon. Considérons d'abord l'intégrale

$$\int\int \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{f\varphi}\, dx\, dy.$$

Désignons par x_0 et y_0 les valeurs initiales d'intégration sur C et C'; prenons une détermination initiale de

$$\log f(x_0, y_0),$$

et, dans la suite, $\log f(x, y)$ désignera la détermination obtenue du logarithme, quand x et y ont marché respectivement sur C et C' depuis x_0 et y_0 dans le sens positif. En intégrant par parties,

on a

$$\int_C\int_{C'} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\varphi} dx\, dy = \int_{C'} [\log f(x'_0, y) - \log f(x_0, y)] \frac{\varphi'_y(x_0, y)}{\varphi(x_0, y)} dy - \int_C\int_{C'} \log f(x, y) \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial x\, \partial y} dx\, dy;$$

$\log f(x'_0, y)$ indique la valeur de $\log f(x, y)$ quand x revient en x_0; la différence des logarithmes qui figurent dans l'intégrale double du second membre est donc égale à $2\pi i m$, m étant un entier. On a de la même manière

$$\int_C\int_{C'} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\varphi} dx\, dy = \int_C [\log f(x, y'_0) - \log f(x, y_0)] \frac{\varphi'_x(x, y_0)}{\varphi(x, y_0)} dx - \int_C\int_{C'} \log f(x, y) \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial x\, \partial y} dx\, dy,$$

et la valeur de $\log f(x, y'_0) - \log(x, y_0)$ est égale à $2\pi i n$, n étant un entier. La valeur de l'intégrale (4) se met alors sous la forme

$$2\pi i \left[m \int_{C'} \frac{\varphi'_y(x_0, y)}{\varphi(x_0, y)} dy - n \int_C \frac{\varphi'_x(x, y_0)}{\varphi(x, y_0)} dx \right];$$

or on a évidemment

$$\int_{C'} \frac{\varphi'_y(x_0, y)}{\varphi(x_0, y)} dy = 2\pi i . n', \qquad \int_C \frac{\varphi'_x(x, y_0)}{\varphi(x, y_0)} dx = 2\pi i . m',$$

m' et n' étant des entiers; nous arrivons donc à

$$-4\pi^2(mn' - m'n),$$

qui est bien de la forme voulue. La signification des entiers m et n est d'ailleurs immédiate, mais le coefficient de $-4\pi^2$ peut avoir une valeur absolue différente du nombre des racines des équations $f = 0$, $\varphi = 0$, pour lesquelles l'x est compris dans C et l'y dans C'.

C'est par une tout autre voie qu'on pourrait obtenir le nombre des racines des deux équations

$$f(x, y) = 0, \qquad \varphi(x, y) = 0,$$

pour lesquelles l'x est contenu dans le contour C, et l'y contenu dans le contour C'. On sait, en effet, qu'on peut représenter ([1]) par une intégrale *triple* le nombre des racines des deux équations précédentes contenu à l'intérieur d'un continuum fermé Σ à trois dimensions situé dans l'espace à quatre dimensions (x, y); cette intégrale triple est étendue à ce continuum Σ. Il suffira ici de prendre pour continuum Σ la somme du continuum obtenu en donnant à x une position quelconque à l'intérieur de C tandis que y reste sur C', et du continuum analogue qui correspond à x restant sur C tandis que y occupe une position quelconque à l'intérieur de C'. La solution du problème proposé est donc fournie par une intégrale *triple*, et non par une intégrale *double*.

10. Faisons, en terminant, une remarque importante ([2]), qui accuse une différence profonde entre la théorie des intégrales doubles de deux variables complexes et celle des intégrales simples d'une variable complexe. Dans cette dernière théorie on ne peut faire passer le chemin d'intégration par un point où la fonction devient infinie : bornons-nous aux intégrales de fractions rationnelles; l'intégrale

$$\int \frac{P(z)}{Q(z)} dz$$

n'a aucun sens, si le chemin d'intégration passe par une racine du polynome $Q(z)$. Il peut en être autrement dans le cas des intégrales doubles ; soit l'intégrale

$$\int\int \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} dx\, dy.$$

Elle pourra avoir un sens bien déterminé si la surface d'intégration S rencontre le continuum défini par l'équation

$$Q(x, y) = 0.$$

Il en sera ainsi si les points de rencontre des continuum S et

([1]) On peut consulter le Chapitre VII du Tome II du *Traité d'Analyse* de M. Picard, où sont exposés les travaux de Kronecker et de M. Picard sur ces questions.

([2]) Cette remarque a été faite par M. Poincaré dans le Mémoire déjà cité (*Acta mathematica*, t. IX, p. 368).

Q ne forment pas une ligne, c'est-à-dire sont des points isolés, et si en ces points le quotient $\frac{P}{Q}$ devient infini seulement du premier ordre. On sait, en effet, qu'une intégrale double ordinaire a un sens, quand l'élément devient infini en un point A, pourvu que la fonction sous le signe d'intégration soit de l'ordre $\frac{1}{\rho}$, en désignant par ρ la distance du point variable au point A.

Prenons, comme exemple, l'intégrale

$$\iint \frac{P(x, y)}{ax + by} dx\, dy,$$

le rapport $\frac{a}{b}$ n'étant pas réel. Supposons que la surface S d'intégration corresponde à un ensemble de valeurs réelles de x et y, parmi lesquelles se trouvent $x = y = 0$. L'intégrale aura un sens, quoique la fonction sous le signe d'intégration devienne infinie pour $x = 0, y = 0$ [nous supposons $P(0, 0) \neq 0$]. Nous pouvons, en effet, sur S, poser

$$x = \rho \cos\theta, \qquad y = \rho \sin\theta,$$

ρ et θ étant réels : nous avons alors l'intégrale

$$\iint \frac{P(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)}{a \cos\theta + b \sin\theta} d\rho\, d\theta.$$

Avec l'hypothèse faite sur le quotient $\frac{a}{b}$, le dénominateur ne peut s'annuler pour une valeur réelle de θ, et l'intégrale a, par suite, une valeur parfaitement déterminée. Le continuum d'intégration et le continuum

$$ax + by = 0$$

ont ici, comme seul point de rencontre, l'origine. Les circonstances seraient autres si $\frac{a}{b}$ était réel ; il y aurait alors une courbe de rencontre entre les deux continuum et l'intégrale n'aurait aucun sens.

Revenons au cas général de l'intégrale

$$\iint \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} dx\, dy,$$

et supposons que la surface d'intégration S rencontre en un point le continuum Q. On déforme la surface S en lui laissant le même contour. Le point de rencontre (x, y) avec Q va se déplacer; il va passer de la position A_1 de coordonnées (x_1, y_1) à la position A_2 de coordonnées (x_2, y_2). La valeur de l'intégrale ne restera pas constante, comme dans le cas où S ne rencontrait pas Q; il est facile de trouver la différence des valeurs finale et initiale de l'intégrale. Cette différence sera égale à la valeur de l'intégrale prise le long de la surface engendrée par une courbe infiniment petite entourant le point x, racine de l'équation

$$Q(x, y) = 0,$$

quand (x, y) se déplace de (x_1, y_1) à (x_2, y_2); elle sera donc égale à l'intégrale simple

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \frac{P(x, y)}{Q'_x(x, y)} dy,$$

comme on le voit de suite, en faisant des calculs analogues à ceux du n° 7.

III. — Des intégrales de différentielles totales de fonctions rationnelles.

11. Nous avons considéré dans la Section précédente des intégrales doubles dans l'espace à quatre dimensions (x_1, x_2, y_1, y_2) qui est le champ de variation des deux variables complexes x et y. D'autres intégrales se présentaient tout d'abord plus immédiatement; ce sont les intégrales de différentielles totales de la forme

$$\int A\,dx + B\,dy,$$

A et B étant des fonctions rationnelles de x et y, et en supposant vérifiée la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Dans ces conditions l'intégrale

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} A\,dx + B\,dy$$

ne varie pas quand on intègre sur une ligne allant du point (x_0, y_0) au point (x, y), pourvu que la ligne, en se déformant, garde les mêmes extrémités et ne rencontre aucun point pour lequel A et B cessent d'être continues.

Si l'on intègre le long d'une ligne fermée, on aura une valeur qui ne changera pas quand on déformera la ligne sans traverser aucune singularité des fonctions A et B. Réduisons A et B au même dénominateur, et soit

$$A = \frac{P(x, y)}{R(x, y)}, \qquad B = \frac{Q(x, y)}{R(x, y)}.$$

On peut supposer que chacun des facteurs irréductibles du polynome $R(x, y)$ dépende à la fois de x et y; il sera toujours possible d'arriver à ce résultat en effectuant sur x et y une substitution linéaire. Nous allons montrer qu'une ligne fermée arbitraire, ne rencontrant pas le continuum

$$(5) \qquad R(x, y) = 0,$$

peut être déformée, sans rencontrer ce continuum, de manière que l'on ait pour tous les points de cette courbe

$$y = \text{const.}$$

Par chaque point de la ligne L nous pouvons, dans l'espace à quatre dimensions, mener une droite ne rencontrant pas le continuum R. Si nous partons d'un point déterminé de L correspondant à $y_2 = y_2^0$ et que nous décrivions ce contour, on peut à chaque point associer une telle droite, celle-ci se déplaçant d'une manière continue; quand on revient au point de départ A, il peut arriver que la droite obtenue en arrivant ne coïncide pas avec celle que l'on avait au départ. Considérons un plan

$$y_1 = y_1^0,$$

le lieu des points de rencontre avec ce plan des droites précédentes forme une courbe L′, non fermée en général, et ses deux extré-

mités a et a' correspondent au point A de L. Une déformation continue, sans traverser le continuum R, permet de passer de L à la ligne fermée λ formée du segment de droite Aa (sur lequel y_2 a la valeur initiale y_2^0), de la courbe L' et de la droite $a'A$ (y_2 ayant la valeur y_2^0). D'autre part, considérons la ligne correspondant à $y_2 = y_2^0$ et à une courbe arbitraire γ allant de a' à a dans le plan $y_1 = y_1^0$; les trois lignes γ, aA, Aa' forment une courbe fermée λ' située dans le plan $y_2 = y_2^0$. L'ensemble des deux courbes λ et λ', en tenant compte des parties communes qui se détruisent, se réduit à une certaine courbe *fermée* située dans le plan

$$y_1 = y_1^0.$$

Il en résulte que la courbe L est remplacée par deux contours : l'un situé dans le plan $y_1 = y_1^0$, l'autre dans le plan $y_2 = y_2^0$. Chacun de ces contours peut maintenant être ramené facilement à un contour pour lequel on ait

$$y = \text{const.}$$

Prenons, par exemple, le contour pour lequel $y_2 = y_2^0$. Pour cette valeur y_2^0, les deux équations

$$\begin{matrix} R_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0 \\ R_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0 \end{matrix} \qquad (R = R_1 + iR_2),$$

déterminent dans l'espace (x_1, x_2, y_1) des courbes ρ. Chaque plan $y_1 = \text{const.}$ rencontre les courbes ρ en un certain nombre de points toujours en même nombre, à savoir le nombre des racines de l'équation $R(x, y) = 0$ pour une valeur arbitraire donnée à y. Sauf pour certaines valeurs de y_2 en nombre fini, l'ensemble des courbes ρ ne présente pas de points multiples; les valeurs de y_2, pour lesquelles cet ensemble a un point multiple, correspondent aux coefficients de i dans les valeurs de y pour lesquelles l'équation $R = 0$ a une racine multiple. On peut supposer que y_2^0 n'est pas une de ces valeurs singulières et déformer la ligne étudiée de façon à la faire venir dans un plan

$$y_1 = y_1^0 :$$

nous avons alors, comme nous le voulions, *réduit notre contour à être dans un plan* $y = \text{const.}$

Il résulte de là que les résidus de l'intégrale

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{R}$$

sont ceux de l'intégrale relative à la seule variable x

$$\int \frac{P(x, y)\,dx}{R(x, y)}.$$

Les résidus de la fonction rationnelle de x

$$\frac{P(x, y)}{R(x, y)}$$

seront par conséquent indépendants de y. Il faut donc nécessairement que la valeur de

$$\frac{P(x_1, y)}{R'_x(x_1, y)},$$

x_1 étant une racine de

$$R(x_1, y) = 0,$$

soit une fonction de y se réduisant à une constante; ceci doit être une conséquence de la condition d'intégrabilité.

CHAPITRE IV.

SINGULARITÉS D'UNE SURFACE ALGÉBRIQUE. DES INVARIANTS D'UNE SURFACE AU POINT DE VUE DE LA GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

I. — Réduction des singularités d'une surface algébrique.

1. La première question qui se présente dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables est l'étude de ses singularités. On sait que les points singuliers d'une surface algébrique peuvent être extrêmement variés; une surface peut avoir des points singuliers *isolés,* ou des points singuliers formant une courbe continue qui est une *ligne multiple*.

Avant d'entrer dans une étude approfondie, on peut remarquer que la représentation paramétrique des coordonnées d'une surface à l'aide de fonctions algébriques de deux paramètres conduit en général à certaines singularités qu'il sera naturel, *à ce point de vue,* de regarder comme *ordinaires*. Prenons d'abord le cas d'une courbe algébrique, et supposons que l'on ait

$$x = f(u),$$
$$y = \varphi(u),$$

f et φ étant des fonctions algébriques d'un paramètre u. Considérons les deux équations

$$f(u) = f(u'),$$
$$\varphi(u) = \varphi(u').$$

On a là deux équations à deux inconnues u et u'. En dehors de la solution $u = u'$, on pourra avoir un nombre limité de solutions (u, u'); à ces valeurs, en prenant les déterminations convenables des fonctions f et φ, correspondra le même point de la courbe, et en général *deux* branches de courbes passant par ce point. Celui-

ci sera donc *un point double,* et, par suite, au point de vue paramétrique où nous venons de nous placer, un point double peut être envisagé comme une singularité ordinaire.

Passons maintenant au cas d'une surface, et partons encore d'une représentation paramétrique

$$x = f(u, v),$$
$$y = \varphi(u, v),$$
$$z = \psi(u, v),$$

où f, φ, ψ sont des fonctions algébriques de u et v. Considérons les équations

$$f(u, v) = f(u', v'),$$
$$\varphi(u, v) = \varphi(u', v'),$$
$$\psi(u, v) = \psi(u', v').$$

Nous avons là trois équations à quatre inconnues u, v, u', v'. En laissant de côté les solutions $u = u'$, $v = v'$, nous pourrons avoir des solutions dépendant d'une arbitraire, et à ces solutions correspondra en général sur la surface une ligne continue par laquelle passeront *deux* nappes de la surface; cette ligne sera *une courbe double.*

Nous pouvons ici aller plus loin, en formant le système

$$(1)\qquad \begin{cases} f(u, v) = f(u', v') = f(u'', v''), \\ \varphi(u, v) = \varphi(u', v') = \varphi(u'', v''), \\ \psi(u, v) = \psi(u', v') = \psi(u'', v'') \end{cases}$$

de six équations à six inconnues u, v, u', v', u'', v''. En dehors des solutions correspondant à

$$u = u' = u'', \qquad v = v' = v'', \qquad w = w' = w'',$$

il pourra y avoir un nombre limité de solutions, et celles-ci correspondront en général à des points triples de la surface. Par un tel point triple O passeront trois lignes doubles de la surface et trois nappes de la surface se coupant deux à deux suivant ces lignes doubles.

Les trois lignes doubles passant par le point O correspondront respectivement aux équations que l'on obtient en prenant deux des trois colonnes verticales dans les équations (1) et en égalant

entre eux les termes d'une même ligne. Le point O sera en général un point triple pour la ligne double, et les tangentes aux trois branches de cette ligne seront en général distinctes. Le cône des tangentes à la surface au point O est formé de trois plans, correspondant respectivement aux trois nappes de la surface passant en ce point; on peut appeler un tel point triple un point *triplanaire*.

2. Un cas particulier très simple et très intéressant d'une représentation paramétrique conduisant, comme ci-dessus, à un point triple est fourni par la surface de Steiner; il nous suffira de rappeler cet exemple. Soient

$$f_1(\alpha, \beta), \quad f_2(\alpha, \beta), \quad f_3(\alpha, \beta), \quad f_4(\alpha, \beta)$$

quatre polynomes quelconque du second degré en α et β. Si l'on pose

$$x = \frac{f_2}{f_1}, \qquad y = \frac{f_3}{f_1}, \qquad z = \frac{f_4}{f_1},$$

on a la surface du quatrième degré qui porte le nom de *Steiner*. Cette surface a été étudiée par Clebsch (*Journal de Crelle,* t. 67) en se plaçant au point de vue du paragraphe précédent. On voit ainsi facilement, avec la représentation paramétrique, que la surface a trois droites doubles formant un trièdre, et le sommet de ce trièdre est un point triple. Dans le plan (α, β), les trois droites doubles correspondent aux trois côtés d'un triangle, et le point triple correspond aux trois sommets de ce triangle.

3. Revenons au cas général. On sait que pour les courbes algébriques la *réduction* des singularités a été faite par M. Nœther à l'aide de transformations quadratiques. L'illustre géomètre d'Erlangen s'est aussi occupé, à diverses reprises, de la réduction des singularités des surfaces ([1]), sans traiter toutefois, ce semble, la question dans son entière généralité. Après M. Nœther, on doit

---

([1]) Nous citerons, particulièrement, un Mémoire de M. Nœther dans les *Comptes rendus de la Société royale de Göttingen*, 1871, et une Note du même auteur dans les *Sitzungsberichte* de l'Académie de Berlin (1888). Dans ce dernier article est énoncé un théorème très important sur lequel nous reviendrons bientôt.

citer, parmi les géomètres qui se sont occupés de la réduction des singularités, M. del Pezzo [1], puis à un point de vue plus spécial M. Kobb [2], et plus récemment M. Segre [3] dans un Mémoire très intéressant au point de vue géométrique.

Dans bien des cas, certaines transformations quadratiques peuvent être employées avec profit pour réduire une singularité : c'est ce qu'avait fait M. Nœther, et ce qu'ont fait aussi MM. Kobb et Segre. Supposons, par exemple, que nous ayons un point multiple d'ordre m à l'origine ; nous aurons l'équation de la surface

$$(f) \qquad 0 = \varphi_m(x, y, z) + \varphi_{m+1}(x, y, z) + \ldots,$$

et nous pouvons supposer que les axes ont une position arbitraire par rapport à la surface. Posons

$$x = XZ, \qquad y = YZ, \qquad z = Z :$$

nous aurons la surface transformée

$$(F) \qquad \varphi_m(X, Y, 1) + Z\,\varphi_{m+1}(X, Y, 1) + \ldots = 0.$$

Considérons d'abord l'ensemble des points de f autour de l'origine, pour lesquels X et Y restent finies. A cet ensemble correspond l'ensemble des points à distance finie de F défini par les deux équations

$$Z = 0, \qquad \varphi_m(X, Y, 1) = 0,$$

c'est-à-dire une certaine courbe de F. Il arrivera en général que cette courbe sera une courbe simple de F, et qu'aucun de ses points multiples, si elle en a, ne sera point multiple de F. Alors le point multiple considéré a été remplacé par des points simples dans la surface transformée, et une réduction se trouve faite qui peut être intéressante dans de nombreuses circonstances. Ainsi, dans le voisinage de chacun des points de la courbe précédente, on peut exprimer une des coordonnées à l'aide des deux autres par un développement holomorphe ou, d'une manière

---

(1) Del Pezzo, *Intorno ai punti singolari delle superficie algebriche* (*Société Math. de Palerme*, 1892).

(2) G. Kobb, *Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (*Journal de Mathématiques*, 1892).

(3) C. Segre, *Sulla composizione dei punti singolari delle superficie algebriche* (*Annali di Matematica*, 1896).

plus générale, les trois coordonnées, par des développements holomorphes dépendant de deux paramètres; il est clair qu'à l'aide d'un nombre limité de tels développements on peut embrasser tous les points de la surface correspondant à des valeurs de Z dont le module est moindre qu'un nombre ε pris suffisamment petit et à des valeurs de X et de Y pour lesquelles les modules de X et Y sont finis, nous voulons dire moindres qu'un nombre déterminé M. Pour les points de la surface primitive f, correspondant à des valeurs de $|X|$ et $|Y|$ supérieures à M, on fera d'autres transformations quadratiques que celles que nous avons effectuées, soit

$$x = X, \qquad y = YX, \qquad z = ZX,$$

ou bien encore

$$x = XY, \qquad y = Y, \qquad z = ZY.$$

On arrivera ainsi *à avoir un nombre limité de développements holomorphes de x, y, z par rapport à deux paramètres u et v dans le voisinage de $u = 0$, $v = 0$, qui donneront l'ensemble des points de la surface f autour de l'origine.*

Nous démontrons ainsi, dans un cas particulier, un théorème absolument général, comme nous allons le voir tout à l'heure. Cette représentation du voisinage de l'origine sur la surface f, à l'aide d'un nombre limité de représentations paramétriques holomorphes, est d'un très grand intérêt.

4. Nous nous sommes placés au paragraphe précédent dans les circonstances les plus favorables. D'autres cas plus complexes peuvent se présenter; bornons-nous, en restant dans le même ordre d'idées, au point double. Le cas général d'un point double est celui où le cône des tangentes est indécomposable; comme cas particuliers, on a celui du point *biplanaire* où le cône se réduit à deux plans, et celui du point *uniplanaire* où le cône se réduit à un plan double.

Le cas du point biplanaire *général* ne donne pas naissance à la moindre difficulté; on aura l'équation de la surface

$$(f) \qquad 0 = \varphi_2(x, y, z) + \varphi_3(x, y, z) + \ldots.$$

En faisant encore

$$x = XZ, \qquad y = YZ, \qquad z = Z,$$

on a la surface transformée

$$(F) \qquad o = \varphi_2(X, Y, 1) + Z\,\varphi_3(X, Y, 1) + \ldots.$$

La conique

$$\varphi_2(X, Y, 1) = 0$$

se compose ici de deux droites. Nous avons donc alors, comme correspondant à l'origine sur f, deux droites sur F; ces droites sont simples et leur point de rencontre sera en général un point simple de la surface F. Il en serait autrement si les coordonnées du point double de la conique φ_2 annulaient $\varphi_3(X, Y, 1)$; en désignant par α et β ces coordonnées, le point $(\alpha, \beta, 0)$ serait un point double de F.

Si l'on veut continuer la réduction, il faudra réduire ce point double de F qui, en général, sera un point à cône indécomposable, et finalement on aura remplacé le point double primitif de f par certaines lignes simples d'une surface transformée ne passant pas par des points multiples de cette surface.

Arrêtons-nous encore sur le point *uniplanaire*. Dans cette hypothèse φ_2 sera un carré parfait et l'on aura

$$\varphi_2(X, Y, 1) = (\alpha X + \beta Y + \gamma)^2.$$

La ligne droite Δ ayant pour équations

$$\alpha X + \beta Y + \gamma = 0, \qquad Z = 0$$

sera en général une ligne simple de F, mais il y aura sur elle deux points doubles de F, à savoir les points correspondant à $Z = 0$ et à

$$\alpha X + \beta Y + \gamma = 0, \qquad \varphi_3(X, Y, 1) = 0.$$

Ces trois points doubles de F, situés sur Δ, seront d'ailleurs, en restant toujours dans la généralité de la singularité envisagée, des points doubles à cône indécomposable, et la réduction pourra encore s'achever sans difficultés.

Les circonstances seraient différentes si φ_3 était divisible par $\alpha X + \beta Y + \gamma$; on pourrait, dans ce cas, mettre l'équation de la surface f sous la forme

$$(f) \qquad x^2 + x\,\psi_2(x, y, z) + \varphi_4(x, y, z) + \ldots = 0.$$

On aura alors ce que les géomètres anglais appellent un *tac-*

nodal point. Toutes les sections planes de la surface, passant par un tacnode, ont en ce point un point double où il y a contact de deux branches. La transformation faite plus haut

$$x = XZ, \qquad y = YZ$$

donne

$$(F) \qquad X^2 + XZ\,\psi_2(X, Y, 1) + Z^2\varphi_4(X, Y, 1) + \ldots = 0.$$

La surface transformée (F) a pour ligne double la droite

$$X = 0, \qquad Z = 0$$

et en général les deux plans tangents à la surface en un point arbitraire de cette droite double seront distincts.

5. Après ces cas particuliers, occupons-nous de l'étude générale des singularités. Nous ne suivrons pas les auteurs cités ci-dessus, dans les démonstrations desquels subsistent peut-être quelques difficultés, et nous aborderons le problème d'une autre manière. Mais revenons d'abord un moment sur les courbes planes. On sait que M. Nœther s'est servi, pour dissoudre les singularités d'une courbe plane, d'une succession de transformations quadratiques. Dans un article récent (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 1896) M. Vessiot s'est servi pour l'étude des courbes planes d'une transformation intéressante que nous allons rappeler; soit

$$f(x, y) = 0,$$

l'équation de la courbe donnée sur laquelle on a d'abord fait une transformation homographique arbitraire. Posons

$$X = x, \qquad Y = \frac{dy}{dx}.$$

On aura une nouvelle courbe entre X et Y, qui correspondra uniformément à la première. On la transforme homographiquement, et l'on recommence la transformation précédente; après avoir opéré ainsi un certain nombre de fois, *tous les points singuliers de la courbe initiale auront été transformés en points simples de la dernière courbe obtenue.* Nous appellerons *transformation* S une transformation permettant d'obtenir ce résultat.

Ceci posé, considérons une surface algébrique f ayant une ligne

multiple L (réductible ou non) de nature quelconque. Faisons pivoter un plan autour d'une droite arbitraire; ce plan, dans chacune de ses positions, coupe la surface suivant une courbe C ayant comme points multiples ses points de rencontre avec la ligne L. Or au moyen d'une transformation S nous pouvons transformer la courbe C en une autre telle que les points multiples de C correspondent à des points simples de la courbe transformée; quand le plan pivote autour de la droite, nous pouvons faire usage d'une transformation S variant elle-même d'une manière continue, et telle que les coordonnées du point transformé soient des fonctions rationnelles des coordonnées du point primitif. On remarquera que pour certaines positions *particulières* du plan la courbe aura des singularités plus complexes que pour une position arbitraire; pour ces positions on devra alors employer pour former S un plus grand nombre de transformations élémentaires. C'est le maximum de ce nombre que l'on devra prendre dans tous les cas, pour être assuré d'avoir une transformation qui dissolve les singularités de la courbe C pour *toutes* les positions du plan. On obtient de cette manière une transformation, que nous pouvons, en employant les coordonnées homogènes, mettre sous la forme

$$\frac{X}{P_1(x, y, z, t)} = \frac{Y}{P_2(x, y, z, t)} = \frac{Z}{P_3(x, y, z, t)} = \frac{T}{P_4(x, y, z, t)},$$

les P étant des polynomes homogènes de même degré en x, y, z, t. Les polynomes P s'annulent tous les quatre pour la ligne multiple L. Les formules précédentes font correspondre à la surface f une surface F, et à la ligne multiple L de f correspond sur F un certain nombre de lignes simples ne passant pas par des points multiples de cette surface; ceci résulte évidemment de ce que dans chaque section tous les points multiples ont été transformés en des points simples de F; la transformation qui a réduit la ligne multiple L a fait naître d'autres singularités, mais le point essentiel pour nous actuellement est *la réduction de la singularité formée par toutes les lignes multiples de la surface.*

Le théorème qui a été démontré tout à l'heure (n° 3) dans un cas très particulier résulte immédiatement de ce qui précède, dans toute sa généralité. A la ligne multiple L de f correspondent sur F des lignes simples, et il est clair que *pour de telles*

lignes on peut avoir, au moyen d'un nombre limité de développements holomorphes, l'ensemble des points de la surface situés dans leur voisinage.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que la surface avait seulement comme singularités des lignes multiples. Il pourrait y avoir en outre des points singuliers *isolés*, mais ceci n'est la source d'aucune difficulté et les mêmes considérations sont applicables. On réduira en effet cette singularité en transformant les sections faites par un plan pivotant autour d'une droite qui passe par le point multiple. En combinant ces diverses transformations, on arrive ainsi en définitive à une transformation de la forme indiquée plus haut

$$\frac{X}{P_1(x, y, z, t)} = \frac{Y}{P_2(x, y, z, t)} = \frac{Z}{P_3(x, y, z, t)} = \frac{T}{P_4(x, y, z, t)},$$

qui réduit toutes les singularités de la surface. Les polynomes P ne s'annulent simultanément que pour les points ou lignes multiples de f, et, sur la surface transformée F, des points simples correspondent aux points singuliers de f. La surface F aura d'ailleurs en général des lignes multiples qui correspondent à des ensembles de couples de points simples (x, y, z, t) et (x', y', z', t') de la surface f, pour lesquels les rapports des polynomes P ont même valeur.

6. La réduction des singularités de la surface est achevée, mais on peut aller plus loin, en cherchant à diminuer autant que possible les singularités de la surface transformée. Envisageons les équations

$$\begin{array}{llll} x_1 = P_1 x, & x_2 = P_1 y, & x_3 = P_1 z, & x_4 = P_1 t, \\ x_5 = P_2 x, & x_6 = P_2 y, & x_7 = P_2 z, & x_8 = P_2 t, \\ x_9 = P_3 x, & x_{10} = P_3 y, & x_{11} = P_3 z, & x_{12} = P_3 t, \\ x_{13} = P_4 x, & x_{14} = P_4 y, & x_{15} = P_4 z, & x_{16} = P_4 t. \end{array}$$

Nous pouvons regarder $(x_1, x_2, \ldots, x_{16})$ comme des coordonnées homogènes dans un espace E_{15} à quinze dimensions (complexes). Une variété V à deux dimensions complexes, que nous pouvons appeler une *surface,* se trouve ainsi définie dans l'espace E_{15}. La surface V correspond uniformément à la surface f;

en effet, à un point arbitraire de V ne peuvent correspondre plusieurs points de f, puisque, d'après la forme même des équations précédentes, les valeurs de x, y, z, t qui leur correspondraient seraient proportionnelles. De plus, *cette surface n'a pas de points singuliers*. En effet, tout d'abord, aux points multiples de la surface initiale f, ne correspondent que des points simples d'après la propriété de la transformation

$$\frac{X}{P_1} = \frac{Y}{P_2} = \frac{Z}{P_3} = \frac{T}{P_4};$$

ensuite à deux points simples distincts de la surface f ne peut correspondre le même point de V, car si à deux points (x, y, z, t), (x', y', z', t'), de f correspond le même point de V, on aura nécessairement

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \frac{t'}{t},$$

et ces deux points ne sont pas distincts.

Nous avons donc le théorème suivant : *A une surface algébrique quelconque f de l'espace à trois dimensions on peut faire correspondre d'une manière birationnelle une surface* n'ayant pas de points singuliers *dans un espace* à *quinze dimensions.*

7. On peut réduire beaucoup le nombre des dimensions de l'espace dans lequel on peut avoir une surface *sans singularités* correspondant birationnellement à la surface primitivement donnée dans l'espace à trois dimensions.

Pour faire cette réduction ultérieure, rappelons quelques généralités sur la notion de perspective prise dans son sens le plus étendu, qui, posée d'abord par Clifford, a été surtout utilisée par les géomètres italiens et particulièrement par M. Veronese dans des recherches d'un grand intérêt. Considérons un espace S_r à r dimensions, où nous désignons les coordonnées d'un point arbitraire par

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_r.$$

Un espace *linéaire* $S_{r'}$, contenu dans S_r, est l'espace S_r où l'on suppose les x liées par $r - r'$ relations linéaires. Un espace $S_{r-\rho}$ sera par conséquent défini par ρ relations linéaires entre les x.

Étant donné un espace linéaire $S_{r-\rho}$ contenu dans S_r, prenons un point arbitraire A de S_r. On peut par A et $S_{r-\rho}$ faire passer un espace linéaire $S_{r-\rho+1}$; soient en effet

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad \ldots, \quad U_\rho = 0$$

les ρ relations linéaires déterminant $S_{r-\rho}$; prenons la combinaison

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \ldots + \lambda_\rho U_\rho = 0,$$

et écrivons qu'elle est vérifiée par les coordonnées du point A. Alors un des λ, soit λ_ρ, est déterminé en fonction des autres, et nous avons une relation

$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \ldots + \lambda_{\rho-1} V_{\rho-1} = 0,$$

qui, quels que soient les λ, est vérifiée par les coordonnées de A, et qui est aussi vérifiée par les coordonnées des points de $S_{r-\rho}$; par suite, les équations

$$V_1 = 0, \quad V_2 = 0, \quad \ldots, \quad V_{\rho-1} = 0$$

déterminent un espace $S_{r-\rho+1}$ qui passe par A et contient $S_{r-\rho}$. Si maintenant on prend l'intersection de $S_{r-\rho+1}$ avec un espace linéaire $S_{\rho-1}$, on a un seul point de rencontre A', et ce point s'appelle la *projection de* A *sur* $S_{\rho-1}$, le point de vue étant ici $S_{r-\rho}$. Ainsi, dans cette perspective généralisée, *on prend comme point de vue un espace linéaire* $S_{r-\rho}$, *et l'on projette sur un espace* $S_{\rho-1}$.

Si l'on prend $\rho = r$, le point de vue sera véritablement un point et l'on projettera sur un espace S_{r-1}; en particulier pour $r = 3$, on a la projection conique habituelle, l'espace linéaire S_2 sur lequel on projette est alors un plan.

8. Nous avons tout à l'heure considéré un espace à quinze dimensions dans lequel nous avions une surface V sans singularités. Nous pouvons faire, conformément à ce qui précède, des perspectives sur un espace linéaire d'un moindre nombre de dimensions. Prenons comme espace, sur lequel on va projeter, un espace linéaire S_5 à cinq dimensions; on aura donc ici $\rho = 6$ et l'on prendra par suite pour point de vue un espace S_9. Nous aurons alors dans S_5 une surface V' perspective de la sur-

face V en prenant S_9 comme point de vue. La surface V' n'aura pas non plus de point singulier si S_9 est arbitraire; un point multiple de V' devrait correspondre en effet à la fois à deux points distincts de V. Nous aurions donc pour déterminer ce point cinq relations entre les quatre paramètres dont dépendent les coordonnées de ces deux points, et ces relations ne seront pas compatibles si S_9 et S_5 sont choisis arbitrairement. Nous avons donc le théorème suivant :

A une surface algébrique quelconque

$$f(x, y, z) = 0$$

on peut faire correspondre birationnellement, dans l'espace à cinq dimensions, une surface n'ayant aucune singularité.

Le raisonnement précédent montre encore que, si l'on projetait sur un espace S_4, on obtiendrait dans cet espace à quatre dimensions une surface ayant seulement des points singuliers isolés. Enfin, projetons dans un espace S_3, en prenant par conséquent comme point de vue un espace S_{11}; la surface perspective va avoir une ligne singulière puisque le nombre des équations à écrire est égal à *trois* et que nous avons *quatre* inconnues, ce qui est à rapprocher d'ailleurs de ce que nous avons dit au nº 1. Les singularités seront alors, pour S_3 et S_{11} arbitraires, une ligne double généralement avec des points triples, comme nous l'avons vu dans ce même numéro. Par suite :

A toute surface algébrique

$$f(x, y, z) = 0,$$

à singularités quelconques, on peut faire correspondre birationnellement une surface

$$F(X, Y, Z) = 0,$$

n'ayant d'autres singularités qu'une courbe double avec des points triples, ces singularités étant les plus générales de leur nature.

Nous donnerons souvent, par la suite, le nom de *singularités ordinaires* aux singularités précédentes. Les points triples de la

courbe double sont en même temps des points triples de la surface; en ces points, le cône des tangentes se réduit à trois plans formant un angle trièdre. Sur une ligne double, les deux plans tangents sont en général différents; il peut toutefois y avoir certains points où les deux plans tangents sont confondus. Ce sont les points que les géomètres anglais appellent *pinch-point* (point-pince); ces points seront les plus généraux de leur nature.

II. — Définition des ordres de connexion d'une surface algébrique.

9. Nous allons maintenant définir les ordres de connexion d'une surface algébrique. Il est auparavant nécessaire de faire quelques remarques relativement aux variétés qui s'étendent à l'infini. Dans les études d'*Analysis situs* faites au Chapitre II, il a toujours été supposé que les variétés étaient entièrement à distance finie. Quand on a des variétés qui s'étendent à l'infini, les nombres relatifs aux connexions peuvent varier avec l'idée que l'on se fait de la nature des points à l'infini.

Prenons d'abord le cas très simple du plan indéfini; c'est une variété à deux dimensions. Quelle connexion linéaire doit-on lui attribuer? Si, comme on le fait dans la théorie des fonctions d'une variable complexe, on assimile le plan indéfini à une sphère par inversion, on est ramené à la variété formée par la surface d'une sphère, et l'on doit prendre, comme on le fait,

$$p_1 = 1.$$

On pourrait toutefois se placer à un autre point de vue. Le plan indéfini correspond à l'ensemble des valeurs de x et y variant entre $-\infty$ et $+\infty$; on peut transformer l'axe des x en une circonférence, et pareillement pour l'axe des y. On a alors la variété formée par deux circonférences, considérée au Chapitre II (n° 17); pour cette variété, on a

$$p_1 = 3.$$

Par conséquent, suivant le point de vue auquel on s'est placé, on a des nombres différents pour exprimer l'ordre de connexion linéaire p_1 d'un plan simple.

Ceci dit, si nous considérons une surface algébrique

$$f(x, y, z) = 0,$$

nous avons là évidemment une variété à *quatre* dimensions réelles. Si nous voulons la regarder comme une variété fermée, nous devons la ramener tout entière à distance finie, ce qui va préciser la façon dont on envisagera les points à l'infini. On pourrait faire différents choix, mais si l'on veut laisser à la variable complexe son autonomie, il faut se représenter x, y, z comme des points situés chacun sur une surface sphérique correspondant à cette quantité complexe. On aura alors, représentée par l'équation $f = 0$, une variété fermée située tout entière à distance finie.

Relativement à la valeur de ses ordres de connexion, une circonstance pourrait gêner. Notre variété se coupera elle-même, si la surface f a des points singuliers. On évitera bien aisément cette difficulté en se reportant à la surface V de l'espace à cinq dimensions qui correspond uniformément à f; on représentera sur une sphère chaque coordonnée complexe de l'espace à cinq dimensions, et la surface V définira une variété fermée à *quatre* dimensions réelles, située tout entière à distance finie, et ne se coupant pas elle-même.

Ayant maintenant une telle variété, nous savons qu'elle a *trois* ordres de connexion

$$p_1, \quad p_2, \quad p_3,$$

correspondant respectivement à *une, deux* et *trois* dimensions. Mais, d'après le théorème général établi à la fin du Chapitre précédent, on a

$$p_1 = p_3,$$

et nous avons, par suite, seulement *à introduire, dans la théorie des surfaces algébriques, les deux nombres*

$$p_1 \quad \text{et} \quad p_2,$$

correspondant respectivement à la connexion linéaire et à la connexion à deux dimensions [1]. Nous allons nous occuper,

[1] Ces deux nombres ont été introduits pour la première fois dans la théorie des surfaces algébriques par M. Picard, dans son Mémoire sur les fonctions algébriques de deux variables; les notations étaient un peu différentes, p_1 et p_2 étant remplacés par $p_1 + 1$ et $p_2 + 1$.

dans les Sections suivantes, de la connexion linéaire. Prenons seulement ici le cas particulier de l'espace à quatre dimensions correspondant aux deux variables complexes indéfinies x et y. Quels ordres de connexion devons-nous attribuer à cette multiplicité? Nous avons à considérer les deux surfaces sphériques correspondant aux variables complexes x et y, et nous avons par suite le continuum déjà considéré au n° 19 du Chapitre II, c'est-à-dire que l'on doit prendre

$$p_1 = 1, \qquad p_2 = 3.$$

Tels sont, au point de vue où nous nous plaçons, les ordres de connexion pour l'espace indéfini (x, y).

Lorsqu'il s'agira de la détermination des nombres p_1 et p_2, les considérations purement géométriques présenteront le plus souvent de grandes difficultés, que l'on évitera en se plaçant au point de vue transcendant (Chap. II, n° 18), c'est-à-dire en envisageant le nombre p comme représentant le nombre de périodes distinctes de certaines intégrales. C'est à ce point de vue que nous nous placerons ultérieurement pour la détermination de p_1.

III. — Généralités sur la connexion linéaire dans les surfaces algébriques [1].

10. Nous allons approfondir l'étude du nombre p_1, et démontrer tout d'abord un théorème fondamental relatif à ce nombre, à savoir qu'*il est,* en général, *égal à l'unité;* c'est seulement pour certaines surfaces particulières que p_1 est supérieur à *un*.

Un cycle linéaire est un continuum fermé à une dimension (réelle). Si la surface est donnée par l'équation

$$f(x, y, z) = 0,$$

on peut, en particulier, considérer dans l'espace à quatre dimensions relatif aux deux variables complexes x et y, une courbe fermée telle que, en partant d'un point (x_0, y_0) de cette courbe,

---

[1] E. PICARD, *Mémoire sur les fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (*Journal de Mathématiques*, 1889).

avec une valeur initiale z_0 pour z, on revienne au point de départ avec la même valeur de z. On suppose, bien entendu, que la courbe ne rencontre aucun système de valeurs singulières de la variable z considérée comme fonction de x et y. Ces valeurs singulières seront évidemment fournies par les deux équations

$$f(x, y, z) = 0, \qquad f'_z(x, y, z) = 0.$$

L'élimination de z entre ces deux équations donne une équation

$$R(x, y) = 0.$$

Nous ne diminuons pas la généralité, en supposant que cette équation R contient x, dans le cas où elle est irréductible, et qu'il en est de même de chacun de ses facteurs si elle est décomposable en plusieurs autres; il suffit de faire préalablement une transformation homographique pour réaliser cette condition, qui peut encore s'exprimer en disant qu'il n'y a pas de singularités définies par une équation $y = \text{const.}$

11. Ceci posé, montrons en premier lieu que *tout cycle linéaire peut, par une déformation continue, être ramené à être situé dans un continuum*

$$y = \text{const.}$$

Nous n'avons qu'à reproduire à peu près un raisonnement fait au n° **11** du Chapitre III. En posant $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$, nous pouvons regarder le cycle C comme défini à l'aide des expressions de x_1, x_2 et y_2 en fonction de y_1 ; cette dernière variable variera entre deux valeurs extrêmes a et b. Partons sur le cycle d'un point M_0 correspondant à la valeur y_1^0; quand M parcourt le cycle, menons par chaque position de M une droite de l'espace (x_1, x_2, y_2), où y_1 a la valeur correspondant à M, variant d'une manière continue et uniquement assujettie à la condition de ne pas rencontrer le continuum R à deux dimensions défini par l'équation

$$R(x, y) = 0. \tag{1}$$

Quand M reviendra en M_0, la position finale de la droite pourra ne pas coïncider avec sa position initiale. Considérons alors la

variété à trois dimensions

$$(2) \qquad y_2 = y_2^0.$$

Chacune des droites rencontrera en un point cette variété, de sorte qu'à chaque point M de C correspond un point m de la variété (2), sauf pour le point M_0, auquel correspondent deux points m_0 et m'_0. Nous formons ainsi une courbe fermée H composée des deux segments de droite $M_0 m_0$ et $m'_0 M_0$ (pour lesquels on a $y_1 = y_1^0$), et de la courbe Γ lieu des points m avec le sens de m_0 en m'_0. Il est manifeste qu'on peut passer de C à H par une déformation continue sans rencontrer R, puisque aucune des droites ne rencontre R. Or, nous allons maintenant considérer H comme une somme de deux courbes. On a pour les points m_0 et m'_0

$$y_1 = y_1^0, \qquad y_2 = y_2^0,$$

et, en ces points, z a des valeurs déterminées z_0 et z'_0. Il sera possible, en faisant seulement varier x, de décrire une courbe γ allant dans le continuum

$$y = y_1^0 + i y_2^0$$

du point m'_0 au point m_0 et telle que z aille de z_0 à z'_0. Il suffit alors d'envisager la courbe fermée formée de

$$\Gamma \quad \text{et} \quad \gamma,$$

et la courbe fermée formée de

$$M_0 m_0, \quad -\gamma \quad \text{et} \quad m'_0 M_0;$$

la somme de ces deux cycles donne le cycle C; le premier de ces cycles est contenu dans l'espace

$$y_2 = y_2^0,$$

et le second dans l'espace

$$y_1 = y_1^0.$$

Or nous avons vu précédemment (*loc. cit.*, Chap. III), et il est d'ailleurs évident que tout cycle contenu dans l'espace $y_1 = y_1^0$, c'est-à-dire pouvant être figuré dans l'espace à trois dimensions (x_1, x_2, y_2), peut être ramené dans le plan $y_2 = y_2^0$, pourvu que y_1^0 ne soit pas une valeur spéciale, et il en sera de même pour le second cycle en intervertissant y_1 et y_2. Finalement, les deux cycles,

et par suite C, sont ramenés, par une déformation continue, à être dans le continuum

$$y = y_1^0 + i y_2^0,$$

où le second membre est une constante arbitraire; c'est ce que nous voulions montrer.

12. Pour démontrer le théorème énoncé au n° 10, plaçons-nous d'abord dans un cas très simple, en examinant le cas où l'équation de la surface serait de la forme

$$z^2 = f(x, y),$$

et où nous supposerons que $f(x, y)$ est un polynome arbitraire de degré m. Nous allons chercher à nous rendre compte de la nature des cycles linéaires de cette surface. Donnons à y une valeur arbitraire; l'équation

$$f(x, y) = 0$$

aura m racines distinctes; si l'on considère x comme fonction de y, deux valeurs de x seulement deviendront égales pour chaque valeur singulière de y. Soient, pour une valeur y_0 non singulière de y,

$$x_1^0, \quad x_2^0, \quad \ldots, \quad x_m^0$$

les m valeurs de x. Nous avons pour y un certain nombre de positions singulières, et l'on peut, comme on sait, disposer dans le plan de la variable y des lacets partant de y_0 et jouissant des propriétés suivantes : un certain nombre de ces lacets, dans un ordre déterminé autour de y_0, permutent x_1^0 et x_2^0, les suivants permutent x_2^0 et x_3^0, et ainsi de suite, jusqu'à un dernier ensemble de lacets permutant x_{m-1}^0 et x_m^0. Prenons sur un lacet permutant x_1^0 et x_2^0 un point y' voisin du point de ramification b, on aura deux valeurs x_1' et x_2' de x_1 et x_2 qui seront voisines; entourons-les par une petite courbe γ. Quand y varie à partir de y', les valeurs correspondantes des x varient; pendant cette variation, déformons en même temps la courbe γ de manière qu'elle ne rencontre aucun de ces points x pendant cette déformation (la courbe γ pourra alors cesser d'être très petite, du moins dans les deux dimensions). Si, en particulier, y vient en y_0 en ayant suivi le

lacet considéré, la courbe γ sera devenue une courbe C_{12} comprenant à son intérieur les points x_1^0 et x_2^0, tandis que les autres valeurs des x^0 sont à l'extérieur. Si maintenant y partant de y_0 décrit un lacet permutant x_2^0 et x_3^0 et revient en y_0, le contour C_{12} sera devenu, par une déformation effectuée toujours dans les mêmes conditions, un contour C_{13} comprenant à son intérieur x_1^0 et x_3^0, et ainsi de suite. Nous arrivons donc ainsi à tracer sur le plan de la variable x des contours

$$C_{12}, \quad C_{13}, \quad \ldots, \quad C_{1,m},$$

enveloppant chacun deux racines et deux racines seulement de l'équation

$$f(x, y_0) = 0.$$

Or, tous les cycles de la courbe algébrique entre z et x,

$$z^2 = f(x, y_0),$$

se ramènent évidemment à une somme des contours précédents, et nous avons vu, d'autre part, au paragraphe précédent, que tous les cycles de la surface proposée se ramèneront aux cycles de cette courbe. Mais ces derniers ne sont pas distincts puisque, par une variation convenable de y, on peut, en revenant à y_0, permuter les cycles C les uns dans les autres. Nous sommes donc déjà assuré que tous les cycles de la surface se ramèneront à un seul, et nous pouvons supposer que ce cycle unique est le cycle C_{12}. Enfin, celui-ci se ramène au petit cycle γ tracé dans le continuum $y = y'$ autour de x'_1 et x'_2; ces deux dernières valeurs diffèrent très peu elles-mêmes de la valeur $x = a$, racine double de l'équation

$$f(x, b) = 0.$$

Or, l'équation de la surface peut s'écrire

$$z^2 = B(y - b) + A(x - a)^2 + \ldots \qquad (AB \neq 0),$$

les termes non écrits étant de degré supérieur au premier; il en résulte que le point $(a, b, 0)$ est un point simple de la surface. Nous avons donc un cycle très petit tracé dans le voisinage d'un point *simple* de la surface; or, un tel cycle se ramène manifestement à zéro, car, si l'on considère, dans l'équation de la surface, y comme fonction de x et de z, on n'a plus aucune singularité.

Nous avons donc démontré que, pour la surface

$$z^2 = f(x, y),$$

tous les cycles se réduisent à des cycles nuls; on a, par suite, pour cette surface, $p_1 = 1$.

13. Nous avons supposé, dans le paragraphe précédent, que $f(x, y)$ était le polynome le plus général de son degré, mais on voit facilement que la conclusion sera la même dans bien d'autres cas. Si l'on réfléchit à l'analyse qui vient d'être développée, on voit que son succès tient à la circonstance suivante : *Étant donnés deux groupes de deux racines*

$$(x_i^0, x_k^0) \quad \text{et} \quad (x_l^0, x_m^0),$$

on peut, quand f est un polynome général, en faisant décrire à y un chemin convenable partant de y_0 et y revenant, passer du premier groupe au second. En effet, on peut d'abord transformer chacun des groupes précédents de manière que l'une de ces racines soient x_1^0; on aura ainsi les deux groupes

$$(x_1^0, x_\alpha^0) \quad \text{et} \quad (x_1^0, x_\beta^0) \qquad (\alpha \neq 1, \beta \neq 1).$$

Si $\alpha = \beta$, la remarque est établie; dans le cas contraire, on pourra faire décrire à y, partant de y_0 et y revenant, des lacets qui transformeront x_α^0 en x_β^0 sans modifier x_1^0, et nous avons encore le résultat voulu.

La circonstance indiquée peut se présenter, même quand $f(x,y)$ est un polynome très particulier. Il suffira que l'on puisse trouver un système de $m - 1$ lacets binaires permutant x_1^0 et x_2^0, puis une des deux racines x_1^0, x_2^0 avec une troisième x_3^0, et ensuite une des trois racines x_1^0, x_2^0, x_3^0 avec une quatrième x_4^0, et ainsi de suite. Il en sera ainsi, en particulier, si *tous* les points de ramification permutent seulement deux racines.

14. Nous avons considéré (n° 12) une surface d'une forme particulière; on peut déjà présumer, d'après le résultat obtenu, que, pour la surface la plus générale de degré m, on aura aussi $p_1 = 1$.

Pour le voir nettement, prenons la surface

$$z^m = f(x, y),$$

où $f(x, y)$ est un polynome arbitraire de degré m. Les raisonnements, faits pour le cas de $m = 2$, sont applicables avec bien peu de modifications; tous les cycles de la courbe

$$z^m = f(x, y),$$

où l'on regarde y comme un paramètre, peuvent être obtenus de la manière suivante. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_m$ les m racines de l'équation

$$f(x, y) = 0;$$

on aura un cycle en décrivant p fois un lacet autour d'une racine x_i, et en faisant suivre ce chemin d'un lacet décrit $m - p$ fois autour d'une autre racine x_k. Si l'on donne à y une valeur voisine d'une valeur singulière, on aura deux racines x_1 et x_2, par exemple, voisines l'une de l'autre, et les deux lacets, formant le cycle précédent, peuvent être pris très petits, de sorte que le cycle considéré est un cycle infiniment petit. Il n'y a alors rien à changer aux raisonnements faits plus haut : nous sommes encore conduits à des cycles infiniment petits dans le voisinage d'un point simple de la surface, et *par suite tous les cycles se ramènent à zéro.*

La surface précédente a encore une équation de forme particulière, mais elle n'a pas de points multiples. Or, si l'on prend une surface de degré m sans singularités, et que l'on fasse varier, d'une manière continue, les coefficients de son équation sans que la surface acquière jamais de points singuliers, la connexion linéaire ne variera pas, puisque la surface, pendant sa déformation, n'arrive jamais à se couper elle-même, et que tout cycle infiniment petit ne cesse pas d'être réductible à un cycle nul. Nous avons donc établi que *tous les cycles linéaires d'une surface de degré m, sans points singuliers, se ramènent à zéro; on a, par suite, pour cette surface*

$$p_1 = 1,$$

comme nous l'avons énoncé.

15. Nous avons rencontré, dans les démonstrations précédentes, des cycles infiniment petits autour de points simples de la surface. De pareils cycles se réduisent à des cycles nuls, mais *un cycle infiniment petit, dans le voisinage d'un point singulier d'une surface algébrique, peut ne pas se réduire à un cycle nul.* On conçoit, en effet, qu'à une courbe infiniment petite, tracée dans le voisinage d'un point multiple, puisse correspondre une courbe finie sur la surface sans singularités, d'un espace à cinq dimensions, à laquelle est équivalente notre surface. Pour en avoir un exemple très simple, il suffira de considérer un cône

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$

de degré m, ayant son sommet en $x = y = z = 0$. Considérons l'intégrale

$$\int \frac{Q(x, y, z)(x\,dy - y\,dx)}{\varphi'_z}, \tag{3}$$

$Q(x, y, z)$ étant un polynome homogène adjoint d'ordre $m - 3$, pour la courbe représentée en coordonnées homogènes par $\varphi = 0$; cette intégrale est visiblement une intégrale de différentielle totale, et l'on peut aussi la regarder comme une intégrale de première espèce, relative à cette courbe que nous supposerons de genre supérieur à zéro. On pourra avoir, dans le voisinage de $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, un cycle infiniment petit qui ne se réduise pas à un cycle nul; il est possible, en effet, d'avoir des cycles infiniment petits pour lesquels la période de l'intégrale précédente sera différente de zéro. Il suffit de prendre un cycle sur la surface de Riemann correspondant à la courbe

$$\varphi(u, v, 1) = 0$$

et de poser

$$\frac{x}{z} = u, \qquad \frac{y}{z} = v;$$

pour $z = \varepsilon$, correspond, sur la surface, un cycle infiniment petit si ε est infiniment petit, et pour ce cycle l'intégrale (3) aura une valeur différente de zéro : *le cycle infiniment petit ne se réduira donc pas ici à un cycle nul.*

16. Indiquons, de suite, une classe assez étendue de surfaces

pour laquelle le nombre p_1 sera supérieur à l'unité. Soit une surface f pour laquelle les coordonnées (x, y, z) d'un point quelconque soient susceptibles de s'exprimer de la manière suivante :

$$x = R_1(\alpha, \beta, \alpha', \beta'),$$
$$y = R_2(\alpha, \beta, \alpha', \beta'),$$
$$z = R_3(\alpha, \beta, \alpha', \beta'),$$

les R étant fonctions rationnelles des α et des β, et l'on a

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0, \qquad \psi(\alpha', \beta') = 0,$$

φ et ψ étant des polynomes irréductibles; on suppose, de plus, qu'à un point arbitraire (x, y, z) de la surface ne correspond qu'un seul système de valeurs de (α, β) et (α', β').

Si l'on considère les deux surfaces de Riemann correspondant aux courbes φ et ψ, l'ensemble de ces deux surfaces forme un continuum fermé à quatre dimensions, qui correspond, point par point, à la surface f. Or, nous avons étudié précédemment (nº **21**, Chap. II) ce continuum; on aura donc

$$p_1 = 2p + 2p' + 1,$$

en désignant par p et p' les genres respectifs des courbes φ et ψ.

IV. — Étude plus approfondie du nombre des cycles linéaires d'une surface donnée [1].

17. Abordons maintenant la recherche du nombre p_1 relatif à la connexion linéaire d'une surface donnée

$$f(x, y, z) = 0:$$

nous supposerons que les axes sont quelconques par rapport à la surface et que celle-ci n'a que des singularités ordinaires. Nous avons, dans ce qui précède, ramené tout cycle linéaire de la surface dans un continuum $y = C$, et étudié sa déformation d'une manière géométrique. Ceci nous a suffi pour montrer que p_1 était

(1) É. Picard, *Mémoire sur les fonctions algébriques de deux variables*, et *Sur la théorie des surfaces algébriques au point de vue de la Géométrie de situation et sur les intégrales de différentielles totales* (*Comptes rendus*, 15 mars 1897).

égal à l'unité pour la surface générale d'un degré donné, mais il ne paraît pas possible d'aller bien loin, par cette voie géométrique et *de suivre ainsi la transformation des cycles sur la surface de Riemann*

$$f(x, \bar{y}, z) = 0, \tag{4}$$

correspondant à la relation algébrique entre x et z, surface de Riemann dépendant du paramètre arbitraire y. Quand, dans les formules qui vont suivre, nous considérerons y comme un paramètre, nous le surmonterons d'une barre.

18. Pour pouvoir étudier cette transformation, nous allons recourir à une considération qui va jouer, dans la suite, un rôle capital; quelques explications préliminaires vont être nécessaires. Nous partons de la courbe (4). Prenons une intégrale abélienne de seconde espèce, relative à cette courbe pour y arbitraire; nous pouvons trouver une telle intégrale de la forme

$$\int \frac{F(x, y, z)\,dx}{f'_z}, \tag{I}$$

où F, qui est nécessairement rationnelle en x et z, est aussi rationnelle en y. Il est clair, en effet, que, dans toutes les conditions à écrire pour qu'une intégrale soit de seconde espèce, les points doubles de la courbe f figurent de la même manière et, par conséquent, y figurera d'une manière rationnelle dans l'élément différentiel.

Les périodes de l'intégrale (I) sont des fonctions de y; elles satisfont à une équation linéaire dont les coefficients sont des polynomes en y, et dont l'ordre est égal au double du genre de la relation f si l'intégrale est prise arbitrairement ([1]). Nous désignerons par p le genre de la courbe f, pour y arbitraire; nous avons alors une équation linéaire E d'ordre $2p$, à coefficients rationnels, et appartenant à la classe des équations de Fuchs à points singuliers réguliers. Nous n'aurons pas besoin de former

([1]) L'étude des périodes d'une intégrale abélienne relative à une courbe algébrique dépendant de paramètres arbitraires a été faite par M. Fuchs, dans deux importants Mémoires du *Journal de Crelle* (t. 71 et 73).

effectivement l'équation E; il nous suffit de connaître son existence.

19. Les points critiques de l'équation linéaire E sont faciles à trouver : ce seront nécessairement les valeurs de y pour lesquelles le genre de la courbe f descend au-dessous de p. L'emploi du langage géométrique facilite cette recherche; on a à considérer les sections planes de la surface

$$f(x, y, z) = 0,$$

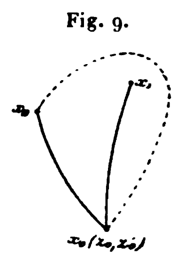
par les plans $y =$ const. Le genre de la section s'abaissera d'une unité quand la section sera tangente à la surface en un point simple; le point de contact deviendra, en effet, un point double pour la section. Il n'y aura aucune autre valeur singulière de y. Les seules valeurs de y sur lesquelles on pourrait *a priori* avoir quelque doute sont celles pour lesquelles le plan est tangent à la courbe double, sans être tangent à l'une des nappes de la surface passant par ce point. Pour une section voisine, on a deux points doubles; pour une section tangente à la courbe double, ces deux points doubles viennent en coïncidence, et l'on a un contact de deux branches, ce qui ne modifie pas le genre de la courbe. Quand la section passe par un point triple de la courbe double, le genre n'est pas non plus modifié, puisque ce point triple remplace trois points doubles d'une section voisine. On voit facilement comment se comportent les intégrales de l'équation E en un point singulier $y = b$; le plan $y = b$ est tangent à la surface en un point (a, b, c). Nous pouvons toujours supposer que la courbe de la surface, correspondant à $F(x, y, z) = \infty$, ne passe pas par les points (a, b, c). Pour y voisin de b, la courbe

$$f(x, \bar{y}, z) = 0$$

a *deux* points de ramification voisins de (a, c); ces deux points de ramification se confondent pour $y = b$ et leur superposition fait naître un point double. Soient (x_1, z_1) et (x_2, z_2) les deux points de ramification voisins de (a, c) quand y est voisin de b; dans le plan de la variable complexe x, on a un cycle formé d'une petite courbe enveloppant les points x_1 et x_2. La période correspondante sera une fonction holomorphe de y dans le voisinage de $y = b$, et sa valeur pour $y = b$ sera, en général, différente de zéro,

mais elle correspondra alors à une période logarithmique de l'intégrale (I) qui aura, au point (a, c), un point logarithmique. Une seconde période de l'intégrale sera obtenue à l'aide d'un lacet aboutissant au point (x_1, z_1), et d'un autre lacet de même origine, convenablement choisi, aboutissant à un point de ramification autre que (x_2, z_2). Il s'agit de voir quelle modification subira cette période quand y tournera autour de b; figurons les points x_1 et x_2, et l'origine x_0 du lacet. Nous avons à rechercher les modifications des intégrales correspondant à ces lacets, quand x_1 et x_2 se permutent. Dans cette permutation, le lacet $(x_0 x_1)$ en trait plein

Fig. 9.



devient le lacet $(x_0 x_2)$ en pointillé. Désignons par z_0 et z'_0 les deux valeurs de z en x_0 qui se changent l'une dans l'autre, quand on suit l'un ou l'autre des deux lacets. Montrons que l'intégrale (I), prise suivant le lacet pointillé, est égale à l'intégrale (I), prise le long du lacet plein $(x_0 x_1)$ augmenté de l'intégrale prise le long d'une courbe entourant x_1 et x_2, ou, ce qui revient au même, de l'intégrale obtenue en parcourant successivement les deux lacets pleins; soient, en effet,

$$I^1_{z_0}, I^1_{z'_0},$$

les valeurs de l'intégrale (I) prises de x_0 en x_1, en prenant respectivement z_0 et z'_0 comme valeurs initiales de z, et introduisons pareillement

$$I^2_{z_0}, I^2_{z'_0} \quad \text{et} \quad I'_{z_0}, I'_{z'_0},$$

correspondant à $x_0 x_2$ plein, et à $x_0 x_2$ pointillé. On aura

$$I'_{z_0} - I^2_{z'_0} = I^1_{z_0} - I^1_{z'_0},$$
$$I'_{z'_0} - I^2_{z_0} = I^1_{z'_0} - I^1_{z_0},$$

donc

$$I'_{z_0} - I'_{z'_0} = I^1_{z_0} - I^1_{z'_0} + \left[\left(I^1_{z_0} - I^1_{z'_0}\right) + \left(I^2_{z'_0} - I^2_{z_0}\right)\right],$$

ce qui démontre la relation annoncée.

L'équation E a donc une seconde intégrale non holomorphe autour du point b, et le résultat précédent montre qu'elle forme avec la première intégrale (qui est holomorphe), un système de deux intégrales correspondant à une racine double de l'équation fondamentale déterminante; un terme logarithmique $\log(y-b)$ s'introduit dans le développement de la seconde intégrale autour de $y=b$. Toutes les autres intégrales de l'équation (E) correspondant à des cycles de l'intégrale (I) où ne figurent pas les lacets aboutissant à (x_1, z_1) et (x_2, z_2) seront holomorphes autour de $y=b$.

D'après la forme même de la substitution linéaire, que nous venons d'obtenir, correspondant à une rotation de y autour du point b, *le groupe de l'équation* E *sera formé de substitutions linéaires à coefficients entiers;* ce résultat était d'ailleurs évident *a priori*. Quand y revient à son point de départ, on trouve un nouveau système de périodes, et celles-ci doivent être des sommes de multiples des périodes initiales.

Remarquons encore que le point $y=\infty$ ne sera pas un point de ramification pour les intégrales de l'équation E, c'est-à-dire que celles-ci seront méromorphes pour $y=\infty$. En effet, si dans l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

on pose $x = x'y$, $z = z'y$, on aura une équation de la forme

$$y^m \varphi(x', z') + y^{m-1} \varphi_1(x', z') + \ldots = 0,$$

que l'on peut écrire

$$\varphi(x', z') + \frac{1}{y} \varphi_1(x', z') + \ldots = 0.$$

Pour $y=\infty$, la courbe devient

$$\varphi(x', z') = 0;$$

elle est de même genre que la courbe donnée pour y arbitraire et, par suite, $y=\infty$ n'est pas un point de ramification pour les intégrales.

20. Le cas le plus simple d'une équation différentielle telle que E est celui de la courbe hyperelliptique

$$z^2 = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)(x - y),$$

où les a sont des constantes différentes. L'équation différentielle E que l'on obtient alors rentre dans un type bien connu, celui des équations différentielles hypergéométriques : les points singuliers de l'équation différentielle sont les points

$$y = a_1, \quad y = a_2, \quad \ldots, \quad y = a_{n-1}, \quad y = \infty,$$

et les résultats énoncés au numéro précédent se vérifient immédiatement.

21. Ces préliminaires posés relativement à l'équation différentielle linéaire E, revenons à la question de la *transformation* des cycles de la surface de Riemann correspondant à la relation algébrique entre x et z

$$f(x, \overline{y}, z) = 0,$$

dépendant du paramètre arbitraire y. C'est l'équation E qui va nous permettre de suivre la déformation des cycles. Dans le cas général, c'est-à-dire si f est le polynome général en x, y et z, l'équation E sera *irréductible;* considérons alors les cycles donnant les $2p$ périodes de l'intégrale (I). Soit pris un de ces cycles et la période correspondante ; en faisant décrire à y tous les chemins possibles, nous reviendrons au point de départ avec $2p$ déterminations linéairement indépendantes de la période. Suivons alors pendant la variation de y, en même temps que la variation de la valeur de la période initiale, la déformation continue du cycle correspondant ; nous arrivons ainsi à $2p$ cycles, et par suite tous les cycles se réduiront à l'un d'entre eux. Si nous prenons y dans le voisinage de la valeur singulière b, nous pourrons prendre comme cycle initial le cycle très petit entourant les deux points (x_1, z_1) et (x_2, z_2) voisins de (a, c) (*voir* n° 10); tous les cycles se ramènent à ce cycle très petit qui se ramène lui-même à un cycle nul, puisqu'on est dans le voisinage d'un point simple de la surface : nous retrouvons le résultat déjà obtenu que $p_1 = 1$ pour la surface générale d'un degré donné, et la conclusion précédente subsistera dans tous les cas où l'équation E sera irréductible.

22. Plaçons-nous maintenant à un point de vue un peu différent. Désignons par

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_{2p}$$

un système de $2p$ périodes; toute substitution du groupe de l'équation linéaire E est de la forme

$$(S) \qquad \Omega_i = m_1^i \omega_1 + m_2^i \omega_2 + \ldots + m_{2p}^i \omega_{2p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p),$$

les m étant des entiers; une telle substitution S correspond à une certaine circulation de y et les Ω indiquent ce que sont devenus les ω après cette circulation. Les équations S peuvent aussi se lire sous forme géométrique; elles indiquent, si $C_1, \ldots, C_{2p}$ indiquent les cycles correspondant aux périodes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2p}$, que le cycle C_1, par exemple, s'est déformé avec la variation de y et s'est transformé en une somme de m_1^1 fois le cycle C_1 plus m_2^1 fois le cycle C_2, plus etc., plus m_{2p}^1 fois le cycle C_{2p}.

Envisageons maintenant le continuum à quatre dimensions représenté par l'équation $f(x, y, z) = 0$. Sur cette variété, à chaque valeur de y correspondent, conformément à ce qui précède, $2p$ cycles $C_1, C_2, \ldots, C_{2p}$, et chacun d'eux, par une circulation convenable de y, se ramène à une somme de multiples des autres. L'ensemble de ces cycles et du transformé de l'un d'eux forme donc une frontière complète. Par suite, si l'on considère une intégrale de différentielle totale de la nature de celles envisagées (Chap. II, n° 16) dans l'*Analysis situs,* et si l'on désigne par

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_{2p}$$

ses périodes relativement aux cycles $C_1, C_2, \ldots, C_{2p}$, la période correspondant au cycle transformé de C_1 sera encore P_1, et de même pour les autres. On aura donc

$$(\pi) \qquad P_i = m_1^i P_1 + m_2^i P_2 + \ldots + m_{2p}^i P_{2p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p),$$

et à chaque substitution du groupe de l'équation correspondront $2p$ équations de cette forme. Il arrivera, en général, que, pour une substitution arbitraire de ce groupe, ces équations donneront seulement

$$P_1 = 0, \qquad P_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad P_{2p} = 0.$$

Donc, pour une intégrale arbitraire toutes les périodes sont nulles,

et nous retombons alors de nouveau sur le fait que tous les cycles se réduisent à zéro, c'est-à-dire que $p_1 = 1$. Mais il arrivera certainement, si $p_1 > 1$, que les équations (π), correspondant à toutes les substitutions du groupe de l'équation (E), pourront être vérifiées autrement qu'en annulant tous les P. Supposons alors que de l'ensemble des équations (π) on puisse tirer $2p - r$ des quantités P en fonction des r autres restant arbitraires, il est clair que les périodes P pourront certainement se réduire à r d'entre elles, et par suite *le nombre des cycles linéaires distincts de la surface sera au plus égal à* r.

Il n'y a pas théoriquement de difficultés impraticables à calculer r; on peut en effet concevoir que l'on forme le groupe de l'équation, et il suffit de former les équations (π) pour les substitutions fondamentales du groupe. En fait, ces calculs seraient bien pénibles et ce sont des considérations différentes qui nous permettront, au Chapitre VI, de calculer r.

Les considérations précédentes, basées sur l'étude d'une intégrale de deuxième espèce dont les périodes sont fonctions de y, ne nous permettent pas d'affirmer que r est égal à $p_1 - 1$, parce que nous n'avons envisagé, en définitive, que des déformations particulières de cycles correspondant à la déformation de la surface de Riemann $f(x, \overline{y}, z) = 0$. Ce nombre r jusqu'ici doit donc être envisagé comme un maximum de $p_1 - 1$, mais nous allons établir qu'il est effectivement égal à ce nombre. Il nous suffira pour cela de montrer que l'on peut former une intégrale de différentielle totale ayant sur la surface r périodes arbitraires données à l'avance dont aucune ne provienne d'une courbe logarithmique.

23. Considérons $2p$ intégrales quelconques de seconde espèce telles que I (n° 18), relatives à la courbe $f(x, \overline{y}, z) = 0$. Désignons-les [1] par

$$I_i = \int \frac{F_i(x, y, z)\, dx}{f'_z} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Ces intégrales ont chacune $2p$ périodes correspondant aux

---

[1] Il sera établi au n° 11 du Chapitre VI que l'on peut supposer que les F sont des polynomes en x, y et z.

mêmes cycles et ont par suite le même groupe de substitutions.

Nous allons chercher si l'on peut déterminer des fonctions *rationnelles* de y

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{2p},$$

de telle sorte que les périodes de l'intégrale

$$a_1 I_1 + a_2 I_2 + \ldots + a_{2p} I_{2p}$$

ne dépendent pas de y. Soient

$$\omega_1^h, \quad \omega_2^h, \quad \ldots, \quad \omega_{2p}^h$$

les $2p$ périodes de I_h; nous avons à écrire les $2p$ équations

$$a_1 \omega_k^1 + a_2 \omega_k^2 + \ldots + a_{2p} \omega_k^{2p} = P_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2p),$$

les P étant des constantes. Supposons que ces constantes satisfassent à l'ensemble des équations (π); je dis qu'alors les $2p$ équations précédentes déterminent pour les a *des fonctions rationnelles de* y.

Faisons, en effet, décrire à y un chemin fermé auquel correspond la substitution (S); les équations précédentes deviennent

$$a_1 \Omega_k^1 + a_2 \Omega_k^2 + \ldots + a_{2p} \Omega_k^{2p} = P_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Mais d'après les valeurs (S), et puisque les P satisfont aux équations (π), ce système d'équations en a sera identique au précédent. On aura donc pour les a des fonctions uniformes de y et par suite des fonctions rationnelles.

Parmi les constantes P, il y en a r d'arbitraires et aucune d'elles ne provient d'un point singulier logarithmique. Pour le prouver il nous suffit de montrer que la période de l'intégrale relative au chemin d'intégration envisagé au n° 19, entourant deux points de ramification voisins x_1 et x_2 de la fonction z de x, correspondant à une valeur y voisine de b, est nulle. Soit ω_1 cette période qui est une fonction holomorphe de y autour de $y = b$: il y a une seconde période ω_2 correspondant à un chemin entourant seulement un des points, soit x_1, et un ou plusieurs autres points de ramification autres que x_2, cette période ω_2 se transformant en $\omega_2 + \omega_1$. Or, pour l'intégrale considérée, ces périodes sont des

constantes; on aura donc

$$\omega_2 = \omega_2 + \omega_1$$

et par suite ω_1 est égal à zéro.

Je dis maintenant qu'il y aura une intégrale de différentielle totale

$$\int R\,dx + S\,dy,$$

où R et S sont des fonctions rationnelles de x, y, z, dans laquelle

$$R = \frac{a_1 F_1 + a_2 F_2 + \ldots + a_{2p} F_{2p}}{f'_z}.$$

Pour le montrer, il faut déterminer S; on devra avoir

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial y},$$

en désignant, bien entendu, par $\frac{\partial R}{\partial y}$ la dérivée partielle, par rapport à y, de R considérée comme fonction de x et y.

On pense d'abord à prendre

$$S = \int_{(x_0, z_1)}^{(x, z)} \frac{\partial R}{\partial y}\,dx = \frac{\partial}{\partial y} \int_{(x_0, z_1)}^{(x, z)} R\,dx.$$

L'intégration qui figure dans l'expression de S est faite en donnant à y une valeur constante d'ailleurs arbitraire, et x_0 est une constante fixe. On a $f(x, y, z) = 0$, et z_1 est une racine de l'équation $f(x_0, y, z_1) = 0$.

L'expression de S, ainsi obtenue, n'a qu'un nombre limité de valeurs : elle n'est pas fonction rationnelle de x, y, z, mais de x, y, z et, en plus, de z_1; nous éviterons cette ambiguïté en considérant la somme

$$\int_{(x_0, z_1)}^{(x, z)} R(x, y, z)\,dx + \int_{(x_0, z_2)}^{(x, z)} R(x, y, z)\,dx + \ldots + \int_{(x_0, z_m)}^{(x, z)} R(x, y, z)\,dx,$$

z_1, z_2, ..., z_m étant les m racines de l'équation

$$f(x_0, y, z) = 0.$$

Cette somme a une valeur déterminée, à un multiple près des pé-

riodes, en un point arbitraire (x, y, z) de la surface

$$f(x, y, z) = 0,$$

et par conséquent

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\sum_{i=1}^{i=m}\int_{x_0, z_i}^{x, z} R(x, y, z)\,dx\right]$$

aura une valeur *unique* en chaque point (x, y, z) de la surface, *puisque les périodes des intégrales ne dépendent pas de y.* Par suite cette expression sera une fonction rationnelle de x, y, z, car les points singuliers de cette fonction ne peuvent être des points singuliers essentiels. Nous prendrons maintenant la fraction rationnelle

$$S(x, y, z) = \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial y}\left[\sum_{i=1}^{i=m}\int_{x_0, z_i}^{x, z} R(x, y, z)\,dx\right].$$

Sa dérivée partielle par rapport à x

$$\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial y}[m\,R(x, y, z)]$$

sera par conséquent la dérivée partielle par rapport à y de la fonction R. Nous aurons donc une intégrale de différentielle totale

$$\int R\,dx + S\,dy$$

où R et S sont des fonctions rationnelles de x, y et z.

Par hypothèse, pour y constant et arbitraire, l'intégrale

$$\int R(x, y, z)\,dx$$

est une intégrale de seconde espèce; montrons pareillement que l'intégrale

$$(5) \qquad \int S(x, y, z)\,dy$$

est une intégrale de seconde espèce pour la courbe entre y et z

$$f(\overline{x}, y, z) = 0,$$

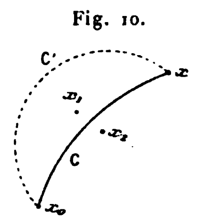
x ayant une valeur constante et arbitraire.

Or la valeur de l'intégrale (5) regardée comme intégrale indéfinie est visiblement égale à

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{i=m}\int_{x_0, z_i}^{x, z} \mathrm{R}(x, y, z)\,dx, \tag{6}$$

les intégrales dans (6) étant relatives à la courbe $f(x, \bar{y}, z) = 0$. Pour un système de valeurs (x, y, z), l'expression (6) aura un nombre fini de valeurs différentes à des multiples près de certaines périodes qui sont les périodes désignées par P. Il faut montrer que, parmi ces périodes, il n'y a pas de périodes provenant d'un point singulier logarithmique. Nous devons donc étudier l'expression (6) en la regardant comme fonction de y, tandis que x et x_0 ont des valeurs fixes. Or cette expression aura d'abord comme points singuliers les valeurs de y points critiques de la fonction algébrique z de y définie par $f(\bar{x}, y, z) = 0$; mais il est évident que ces points sont des points singuliers algébriques. Elle pourrait encore avoir pour points singuliers les points $y = b$; il faudrait alors, en désignant par x_1 et x_2 les deux points voisins de ramification de la fonction z de x correspondant à une valeur de y voisine de b qu'on eût le chemin d'intégration passant entre x_1 et x_2. Il s'agit de voir ce que deviennent dans ces conditions les intégrales figurant dans (6). Or soit l'intégrale de rang i; les valeurs

Fig. 10.

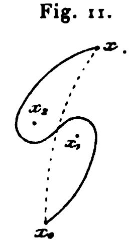


initiale et finale sont z_i et z pour la fonction z; on pourra certainement trouver un autre chemin C' allant de x_0 à x et avec les mêmes valeurs initiale et finale pour la fonction z. La valeur de l'intégrale le long de C pourra donc se remplacer par l'intégrale prise le long du contour fermé formé de C et C' augmentée d'une intégrale prise le long de C'. La première de ces intégrales donne une période, la seconde sera holomorphe dans le voisinage de $y = b$. Faisons main-

tenant tourner y autour de b en revenant au point de départ; nous devons prendre pour (6) la différence des valeurs initiale et finale. Mais, la période étant indépendante de y, cette différence sera nulle, et par suite $y = b$ n'est pas un point singulier logarithmique pour l'intégrale (5).

On pourrait encore démontrer le résultat précédent de la manière suivante : quand y a fait un tour autour de b, il y a eu permutation entre x_1 et x_2, et l'on a alors, au lieu de la figure précédente, la disposition suivante (*fig.* 11). On voit de suite que l'intégrale prise le long du trait plein est égale à l'intégrale prise le long du trait pointillé, augmentée de l'intégrale prise le long d'un chemin partant de x_0 et entourant x_1 et x_2, et cette dernière intégrale est nulle, comme nous l'avons vu précédemment.

Fig. 11.



Nous avons supposé, dans ce qui précède, que y restait à distance finie. Pour étudier le cas où y est dans le voisinage du point ∞, posons, comme au nº 19,

$$x = x'y, \qquad z = z'y.$$

L'expression (6) devient une expression de la forme

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{i=m}\int_{x'_0, z'_i}^{x', z'} R'(x', y, z')\,dx',$$

x', z' et y étant liées par la relation

$$\varphi(x', z') + \frac{1}{y}\varphi_1(x', z') + \ldots = 0.$$

Or, pour y voisin de l'∞, les points critiques x'_1, x'_2, ... de la fonction z' de x' définie par cette équation sont distincts et restent distincts pour $y = \infty$. Il n'y a donc aucune difficulté; la somme (6)

reste uniforme dans le voisinage de $y=\infty$, et par suite ce point n'est pas un point singulier logarithmique pour l'intégrale (5).

Il résulte de cette analyse que, *pour x arbitraire, l'intégrale*

$$\int S(x, y, z)\, dy$$

est une intégrale de seconde espèce pour la courbe $f(\bar{x}, y, z)=0$.

24. Nous venons de former une intégrale de différentielle totale

$$\int R\, dx + S\, dy \tag{7}$$

où R et S sont des fonctions de x, y et z; elle a r périodes arbitraires. Le long de tout cycle infiniment petit, la valeur de cette intégrale est égale à zéro. La chose est évidente, car la surface n'ayant que des singularités ordinaires, tout cycle *infiniment petit* peut se ramener à un cycle *infiniment petit* situé soit dans un continuum $y=$ const., soit dans un continuum $x=$ const. Or nous avons vu que les deux intégrales

$$\int R\, dx \quad \text{et} \quad \int S\, dy$$

sont de seconde espèce : donc la valeur de l'intégrale sera nulle sur le cycle considéré.

Nous allons tirer de là une conséquence de grande importance. L'intégrale (7) ayant r périodes, il n'est pas possible que

$$p_1 - 1 < r,$$

car alors quelqu'une des périodes proviendrait d'un cycle infiniment petit, et nous venons de voir qu'il ne peut en être ainsi. Énonçons donc le théorème suivant :

Le nombre p_1 relatif à la connexion linéaire de la surface est égal à $r+1$.

25. Nous n'irons pas, pour le moment, plus loin dans cette étude, qui sera reprise au Chapitre VI, quand nous étudierons les intégrales de seconde espèce. Nous pouvons dire par avance que *l'intégrale* (7) *est une intégrale de seconde espèce,* et l'analyse

de cette Section établit *une relation étroite entre la connexion linéaire et les intégrales de différentielles totales de seconde espèce*. C'est là un résultat capital, qui donne une base solide à l'étude de la connexion linéaire des surfaces algébriques, mais ce ne sera qu'après avoir fait l'étude des intégrales de seconde espèce que nous pourrons reprendre l'étude du nombre p_1 et montrer comment on peut effectivement calculer r. Disons seulement en ce moment que *pour une surface il y a* $p_1 - 1$ *intégrales distinctes de différentielles totales de seconde espèce :* énoncé qui rappelle une proposition classique dans la théorie des courbes algébriques.

V. — Premier aperçu sur la connexion à deux dimensions (¹).

26. Nous avons défini, d'une manière générale, la connexion p_2 à deux dimensions d'une surface algébrique. Nous ne voulons pas, pour le moment, approfondir cette notion, mais nous tenons à montrer, dès maintenant, la différence considérable qui existe entre p_1 et p_2. Comme nous l'avons vu, la connexion p_1 est la même, pour une surface prise arbitrairement, que pour le continuum correspondant aux deux variables indépendantes illimitées x et y, c'est-à-dire que $p_1 = 1$; il en est tout autrement pour p_2, qui a, en général, une valeur supérieure à la valeur *trois* correspondant à ce continuum ; par suite, *c'est dans la théorie des cycles à deux dimensions d'une surface que se trouve la véritable généralisation de la théorie des cycles d'une courbe algébrique,* généralisation que n'avaient pas donnée les cycles linéaires.

Les domaines fermés à deux dimensions, servant à la définition de p_2, sont *les surfaces cycliques* ou *les cycles à deux dimensions* de la surface s. Il est clair que toute courbe fermée à une dimension, tracée sur un cycle à deux dimensions, est un cycle linéaire de la surface.

Il est aisé de voir que la question des cycles à deux dimensions est intimement liée à celle de la transformation des cycles linéaires en eux-mêmes. Nous avons étudié, dans la Section précédente, la transformation des cycles de la surface de Riemann, définie par

---

(¹) E. PICARD (*Journal de Mathématiques*, p. 189; 1889).

la relation algébrique entre x et z,

$$f(x, \bar{y}, z) = 0.$$

Reprenons l'équation différentielle linéaire E qui a joué le rôle essentiel dans cette théorie; à une intégrale ω de cette équation correspond un certain cycle Γ de la courbe précédente. Faisons alors varier y; le cycle Γ se déforme, comme nous l'avons expliqué. Si maintenant, y revenant à sa valeur initiale, l'intégrale ω revient à sa valeur initiale, le cycle Γ reviendra, à la fin, sur sa position initiale et nous aurons un exemple *d'un cycle à deux dimensions de f engendré par le déplacement de la courbe* Γ.

Désignons toujours par

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_{2p}$$

un système d'intégrales de l'équation E; à quelles conditions une substitution S du groupe de l'équation E sera-t-elle susceptible de donner une surface cyclique? Soient

$$(\mathrm{S}) \qquad \Omega_i = m_i^1\omega_1 + m_i^2\omega_2 + \ldots + m_i^{2p}\omega_{2p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p),$$

les équations de la substitution S; on devra pouvoir trouver une certaine combinaison linéaire

$$M_1\omega_1 + M_2\omega_2 + \ldots + M_{2p}\omega_{2p},$$

à coefficients entiers, que laissera invariable la substitution S, ce qui exige que l'on ait

$$\begin{vmatrix} m_1^1 - 1 & m_1^2 & \ldots & m_1^{2p} \\ m_2^1 & m_2^2 - 1 & \ldots & m_2^{2p} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ m_{2p}^1 & m_{2p}^2 & \ldots & m_{2p}^{2p} - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

A toute substitution S du groupe de l'équation, satisfaisant à la relation précédente, correspond un cycle à deux dimensions qui peut d'ailleurs être susceptible de se ramener à un point ou à une ligne, ou au continuum $x = \text{const.}$, ou au continuum $y = \text{const.}$

27. On voit que la considération des surfaces cycliques conduit à une intéressante question relativement à l'équation linéaire E; cette question est celle des *cycles de cette équation*, c'est-

à-dire des contours fermés ramenant la même valeur d'une intégrale convenable de cette équation différentielle quand on revient au point de départ après avoir parcouru le contour. Mais, comme il a été dit plus haut, nous ne voulons pas pour le moment approfondir ces questions; montrons seulement que, en général, une surface aura des cycles à deux dimensions qui ne seront pas susceptibles, par une déformation continue, de se réduire à un point ou à une ligne, ni à un continuum $x =$ const. ou à un continuum $y =$ const.

Nous le montrerons aisément en anticipant sur une notion qui sera exposée plus loin, celle des intégrales doubles de première espèce (Chap. VII), c'est-à-dire des intégrales doubles restant toujours finies. Soit une telle intégrale

$$\text{(K)} \qquad \iint \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{f_z},$$

où $Q(x, y, z)$ est un polynome arbitraire de degré $m - 4$, si la surface de degré m, représentée par l'équation

$$f(x, y, z) = 0,$$

n'a aucune singularité.

Nous allons voir que la surface a certainement des cycles à deux dimensions pour lesquels l'intégrale (K) a une valeur différente de zéro; il en résultera nécessairement qu'il y a certainement des cycles à deux dimensions, qui ne sont pas susceptibles de se réduire à une ligne ou à un point ni à un continuum $x =$ const. ou à un continuum $y =$ const. et, par suite, p_2 sera supérieur à trois.

Comme nous l'avons déjà dit, le nombre des cycles d'une surface algébrique de degré m, n'ayant aucune singularité, ne change pas si certains paramètres varient, d'une manière continue, dans l'équation de la surface, celle-ci restant toujours sans points singuliers. Il suffira donc de prendre un cas très particulier; nous prendrons la surface

$$(f) \qquad x^m + y^m + z^m = 1,$$

et soit considérée l'intégrale double de première espèce

$$\iint \frac{x^\alpha y^\beta z^\gamma\, dx\, dy}{z^{m-1}}, \qquad \alpha + \beta + \gamma \leq m - 4.$$

On peut représenter la surface précédente par les équations

$$x = x,$$
$$y = \sqrt[m]{1 - x^m}\, t,$$
$$z = \sqrt[m]{1 - x^m}\, \sqrt[m]{1 - t^m},$$

et l'intégrale double devient

$$\iint \frac{x^\alpha\, dx}{(\sqrt[m]{1 - x^m})^{m-2-\beta-\gamma}}\, \frac{t^\beta\, dt}{(\sqrt[m]{1 - t^m})^{m-1-\gamma}}.$$

Or, soient un contour dans le plan de la variable x ramenant la valeur initiale de $\sqrt[m]{1 - x^m}$, et un contour dans le plan de la variable t ramenant la valeur initiale de $\sqrt[m]{1 - t^m}$; à l'ensemble de ces deux contours correspond une surface cyclique de la surface (f), et la valeur correspondante de l'intégrale double, qui se présente sous la forme d'un produit de deux périodes relatives à des intégrales abéliennes ordinaires, est, pour des choix convenables des contours, différente de zéro. Nous sommes donc assuré que l'on a, pour la surface (f),

$$p_2 > 3,$$

et les considérations précédentes pourraient même conduire à la valeur de p_2 pour la surface la plus générale de degré m.

28. Ainsi, une surface algébrique arbitraire possède des cycles effectifs à deux dimensions, tandis qu'elle ne possède pas de cycles linéaires ne se réduisant pas à zéro. En y réfléchissant, on en voit facilement une raison générale si l'on se reporte à l'équation linéaire E; c'est la présence des singularités de la surface qui rend possibles certaines relations particulières dans les substitutions du groupe de cette équation, tandis que la présence de singularités ne peut, au contraire, que diminuer le nombre des substitutions susceptibles de correspondre à un cycle à deux dimensions telles que nous les avons envisagées au n° 26. Nous pouvons donc énoncer la conclusion suivante, étrange au premier abord : *la présence des singularités dans une surface tend à diminuer le nombre des cycles à deux dimensions, tandis qu'elle peut faire naître des cycles linéaires.*

CHAPITRE V.

SUR LES INTÉGRALES DE DIFFÉRENTIELLES TOTALES DE PREMIÈRE ESPÈCE ([1]).

I. — Généralités sur les intégrales de première espèce.

1. Nous allons maintenant commencer l'étude des intégrales de différentielles totales attachées à une surface

$$f(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Nous entendons par là des expressions de la forme

$$\int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P\,dx + Q\,dy, \tag{2}$$

où P et Q sont des fonctions rationnelles de x, y et z ; on suppose remplie la condition d'intégrabilité, en tenant compte, bien entendu, de ce que z est la fonction de x et y définie par l'équation (1).

L'idée d'une classification de ces intégrales, analogue à celle des intégrales abéliennes relatives à une courbe algébrique, vient naturellement à l'esprit. Les intégrales de *première espèce* sont tout d'abord à considérer ; la définition se présente d'elle-même : ce sont *les intégrales qui restent finies pour tout point de la surface*. Il est nécessaire toutefois de préciser cette définition, car il peut y avoir quelque difficulté à entendre ce que signifie la valeur de l'intégrale en un point singulier de la surface. Soit (a, b, c) un point *d'ailleurs quelconque* de la surface ; il y a une infinité de fonctions x, y, z d'une variable t,

$$x = a + \lambda(t), \quad y = b + \mu(t), \quad z = c + \nu(t), \tag{3}$$

([1]) E. Picard, *Sur les intégrales de différentielles totales algébriques de première espèce* (*Comptes rendus*, 1884, et *Journal de Mathématiques*, 1885).

holomorphes dans le voisinage de $t=0$, se réduisant respectivement à a, b, c pour $t=0$, et satisfaisant identiquement à la relation (1). On peut, par exemple, se donner arbitrairement les deux fonctions holomorphes $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ sous la seule condition $\lambda(0)=\mu(0)=0$; en substituant ces valeurs dans (1), on aura une relation entre z et t, d'où l'on tirera pour z un ou plusieurs développements, suivant les puissances de $t^{\frac{1}{n}}$ (n étant un entier convenable). Il suffira de poser $t=t'^n$ pour avoir x, y, z sous forme de série holomorphe par rapport à un paramètre qui est ici t'. On peut regarder les équations (3) comme définissant sur la surface, au voisinage de a, b, c, une certaine courbe passant par ce point; substituons les expressions (3) dans l'intégrale (2), elle deviendra

$$\int^t F(t)\,dt,$$

et supposons que $\frac{1}{F(t)}$ ne se réduise pas à zéro identiquement. Ayant donc pris une courbe (3) satisfaisant à toutes les conditions indiquées, mais par ailleurs complètement arbitraire, nous dirons avec toute précision que l'*intégrale* (2) *est de première espèce si la fonction* $F(t)$, *nécessairement* méromorphe *dans le voisinage de* $t=0$, *est* holomorphe *autour de ce point.*

En particulier, si l'on fait $y=y_0$, y_0 étant une constante arbitraire, l'intégrale (2) devient

$$\int P(x, y_0, z)\,dx:$$

c'est une intégrale abélienne relative à la courbe

$$f(x, y_0, z)=0.$$

Cette intégrale devra être évidemment une intégrale de première espèce pour cette courbe.

On peut donner une seconde définition des intégrales de première espèce qui se formule d'une manière plus rapide. Reportons-nous, à cet effet, à la surface S, sans singularités, de l'espace à cinq dimensions à laquelle correspond uniformément la surface f. En chaque point de S, *l'intégrale de première espèce doit avoir*

une valeur finie bien déterminée et nous n'avons ici besoin de fournir aucune explication supplémentaire, puisque S n'a pas de points singuliers.

2. La définition d'une intégrale de première espèce étant bien comprise, nous envisageons une surface f ayant une telle intégrale. Celle-ci devra avoir un certain nombre de périodes correspondant nécessairement à certains cycles linéaires de la surface ; toutes ces périodes ne peuvent être nulles, car ce sont aussi des périodes d'une intégrale abélienne de première espèce relatives à la courbe $f(x, y_0, z) = 0$. Or, on sait qu'une intégrale abélienne de première espèce a au moins deux périodes distinctes. La surface aura donc au moins deux cycles linéaires distincts et ne se réduisant pas à un cycle nul ; on a, par suite,

$$p_1 \geqq 3,$$

p_1 étant le nombre exprimant l'ordre de la connexion linéaire de la surface.

Nous pouvons déjà déduire de là une conséquence importante. Puisque, *en général*, on a pour une surface $p_1 = 1$, nous sommes assuré qu'*une surface n'a pas, en général, d'intégrale de différentielle totale de première espèce*.

Un problème se pose alors immédiatement, celui de reconnaître si une surface a des intégrales de différentielles totales de première espèce ; c'est cette recherche que nous allons entreprendre.

3. Soit donnée une relation algébrique de degré m

$$F(x, y, z) = 0$$

définissant une fonction algébrique z de x et y et considérons la différentielle totale

$$\frac{P\,dx + Q\,dy}{M},$$

où P, Q, M sont des polynomes en x, y et z, et pour laquelle la condition d'intégrabilité est supposée satisfaite.

Effectuons sur x, y, z une transformation homographique quel-

conque

$$x = \frac{a_1 x' + b_1 y' + c_1 z' + d_1}{a x' + b y' + c z' + d},$$
$$y = \frac{a_2 x' + b_2 y' + c_2 z' + d_2}{a x' + b y' + c z' + d},$$
$$z = \frac{a_3 x' + b_3 y' + c_3 z' + d_3}{a x' + b y' + c z' + d};$$

la relation précédente F deviendra

$$f(x', y', z') = 0.$$

Différentions x et y, on aura

$$dx = \frac{A\,dx' + B\,dy'}{(ax' + by' + cz' + d)^2 \frac{\partial f}{\partial z'}}, \qquad dy = \frac{A_1\,dx' + B_1\,dy'}{(ax' + by' + cz' + d)^2 \frac{\partial f}{\partial z'}},$$

A et A_1 étant des polynomes en x', y', z' de degré $m - 1$ par rapport à x' et z', et de degré m par rapport à x', y', z'; de même B et B_1 sont des polynomes de degré $m - 1$ en y' et z', et de degré m par rapport à x', y', z'. C'est ce qu'on voit de suite en se servant de la relation

$$x' \frac{\partial f}{\partial x'} + y' \frac{\partial f}{\partial y'} + z' \frac{\partial f}{\partial z'} + t' \frac{\partial f}{\partial t'} = 0,$$

où t' est une variable d'homogénéité.

Si maintenant n' est le degré de P et Q, et n celui de M, on aura

$$\frac{P}{M} = \frac{P'}{M'(ax' + by' + cz' + d)^{n'-n}}, \quad \frac{Q}{M} = \frac{Q'}{M'(ax' + by' + cz' + d)^{n'-n}},$$

P' et Q' étant de degré n', et M' de degré n.

Il s'ensuit que l'expression différentielle prend la forme, en supprimant les accents,

$$\frac{P_1\,dx + Q_1\,dy}{M_1 f'_z(x, y, z)}.$$

En désignant par μ le degré de M_1 par rapport à x, y et z, le polynome P_1 est de degré $\mu + m - 3$ par rapport à x et z, et de degré $\mu + m - 2$ par rapport à x, y et z. Pareillement pour Q_1,

le degré par rapport à y et z est $\mu + m - 3$, et $\mu + m - 2$ par rapport à x, y et z.

On peut supposer que le polynome M_1 ne renferme que x et y, car, étant donnés les deux polynomes $M_1(x, y, z)$ et $f(x, y, z)$ premiers entre eux, on peut trouver deux polynomes λ et ν, tels que

$$\lambda M_1 + \nu f = R(x, y),$$

R ne dépendant que de x et y. Par conséquent, en multipliant par λ le numérateur et le dénominateur de l'expression différentielle, on aura une expression de même forme, sauf que M_1 ne dépendra que de x et y.

La différentielle totale étant mise sous cette forme, envisageons maintenant l'intégrale

$$\int \frac{P_1\,dx + Q_1\,dy}{M_1 f'_z},$$

et supposons que cette intégrale soit de première espèce.

Nous pouvons évidemment admettre que l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

renferme un terme en z^m. Si, laissant y constant, nous faisons seulement varier x, nous aurons une intégrale de première espèce

$$\int \frac{P_1\,dx}{M_1 f'_z},$$

pour la courbe $f(x, \bar{y}, z) = 0$.

Il est nécessaire, pour cela, que $\frac{P_1}{M_1}$ puisse se mettre sous la forme $\frac{P_2}{\varphi(y)}$ par la suppression d'un facteur commmun ; pour une raison analogue $\frac{Q_1}{M_1}$ doit pouvoir se mettre sous forme $\frac{Q_2}{\psi(x)}$, et l'intégrale a, par suite, la forme

$$\int \frac{P_2\,dx}{\varphi(y) f'_z} + \frac{Q_2\,dy}{\psi(x) f'_z};$$

cette intégrale peut s'écrire, conformément à la théorie élémentaire des intégrales de différentielles totales

$$\frac{1}{\varphi(y)} \int_{x_0}^{x} \frac{P_2\,dx}{f'_z} + \frac{1}{\psi(x_0)} \int_{y_0}^{y} \frac{Q_2(x_0, y, z)}{f'_z(x_0, y, z)}\,dy.$$

Chacune des intégrales qui figurent dans cette expression est une intégrale abélienne de première espèce, la première intégrale pour la courbe $f(x, \bar{y}, z) = 0$ entre x et z, la seconde pour la courbe $f(x_0, y, z) = 0$ entre y et z. On voit immédiatement que, si le polynome $\varphi(y)$ ne se réduit pas à une constante, l'expression ci-dessus pourra devenir infinie ; pareillement $\psi(x)$ doit se réduire à une constante, et l'intégrale étudiée peut finalement se mettre sous la forme

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{f'_z}:$$

P est un polynome de degré $m-2$ en x, y et z, et de degré $m-3$ en x et z ; pareillement Q est un polynome de degré $m-2$ en x, y et z, et de degré $m-3$ en y et z.

4. Nous n'avons pas jusqu'ici écrit la condition d'intégrabilité que nous avons maintenant à approfondir. On doit avoir

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{f'_z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{f'_z}\right),$$

en considérant z comme fonction de x et y. Cette relation développée devient

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial P}{\partial y} f'_z - \frac{\partial P}{\partial z} f'_y\right) f'_z - P(f''_{zy} f'_z - f''_{z^2} f'_y) \\ -\left(\frac{\partial Q}{\partial x} f'_z - \frac{\partial Q}{\partial z} f'_x\right) f'_z + Q(f''_{zx} f'_z - f''_{z^2} f'_x) = 0.\end{aligned}$$

Le premier membre de cette égalité est un polynome en x, y et z ; il n'est pas nécessairement nul identiquement, mais seulement en vertu de l'équation

$$f(x, y, z) = 0.$$

On reconnaît facilement que l'on peut écrire la condition d'intégrabilité sous la forme

$$(4) \qquad (f'_z)^2\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) + f'_z \frac{\partial}{\partial z}(P f'_y - Q f'_x) - f''_{z^2}(P f'_y - Q f'_x) = 0.$$

Or, si, dans l'intégrale que nous étudions, nous prenons x et z pour variables au lieu de x et y, nous devons tomber sur une

expression de même forme. Effectuant ce changement de variables, l'intégrale devient

$$\int \frac{\frac{\mathrm{P}f'_y - \mathrm{Q}f'_x}{f'_z}\,dx - \mathrm{Q}\,dz}{f'_y}:$$

il est donc nécessaire que l'expression

$$\frac{\mathrm{P}f'_y - \mathrm{Q}f'_x}{f'_z}$$

puisse, en vertu de $f = 0$, se mettre sous la forme d'un polynome en x, y, z. Posons donc

$$\frac{\mathrm{P}f'_y - \mathrm{Q}f'_x}{f'_z} = \mathrm{R}(x, y, z),$$

R étant de degré $m - 3$ par rapport à x et y et de degré $m - 2$ en x, y et z, ou, en écrivant cette même équation sous forme d'identité, indépendamment de l'équation $f = 0$,

$$(5) \qquad \mathrm{P}f'_y - \mathrm{Q}f'_x - \mathrm{R}f'_z = \mathrm{N}f(x, y, z),$$

N étant aussi un polynome, cette dernière relation ayant lieu quels que soient x, y, z. Ceci posé, revenons à l'équation (4) qui pourra s'écrire

$$\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z} + \mathrm{N} = 0.$$

Cette relation doit être vérifiée pour tous les points de la surface f, c'est-à-dire que le polynome

$$\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z} + \mathrm{N}$$

est divisible par f. Mais P, Q, R et N sont des polynomes de degré inférieur à m. Si donc f est irréductible, comme nous le supposons évidemment, la relation

$$(6) \qquad \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z} + \mathrm{N} = 0$$

aura lieu, quels que soient x, y et z.

Posons

$$Q = -A, \qquad P = +B, \qquad R = -C;$$

les identités (5) et (6) se résumeront dans l'identité unique

$$A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial z} + C\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) f(x, y, z),$$

identité en x, y et z, qui joue un rôle essentiel dans la théorie des intégrales de différentielles totales de première espèce.

5. Nous pouvons approfondir davantage la forme des polynomes A, B, C. Ceux-ci sont nécessairement de la forme

$$\begin{aligned} A &= x\varphi(x, y, z) + A_1(x, y, z), \\ B &= y\psi(x, y, z) + B_1(x, y, z), \\ C &= z\chi(x, y, z) + C_1(x, y, z), \end{aligned}$$

φ, ψ, χ étant des polynomes homogènes en x, y, z de degré $m-3$; quant à A_1, B_1, C_1, ce sont des polynomes de degré $m-3$. Or, considérons l'intégrale

$$\int \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z},$$

et posons $y = \mu x$, μ étant une constante : nous aurons l'intégrale abélienne de première espèce

$$\int \frac{(B - A\mu)\,dx}{f'_z},$$

relative à la courbe $f(x, \mu x, z) = 0$. Il en résulte que $B - A\mu$ est de degré $m-3$ au plus en x et z; donc l'expression

$$\mu x[\psi(x, \mu x, z) - \varphi(x, \mu x, z)],$$

qui dans $B - A\mu$ est du degré $m-2$, devra être nulle, et l'on aura

$$\psi(x, \mu x, z) - \varphi(x, \mu x, z) = 0,$$

quel que soit μ, ce qui revient à dire que

$$\psi(x, y, z) = \varphi(x, y, z).$$

En mettant l'intégrale sous la forme

$$\int \frac{-C\,dx + A\,dz}{f'_z},$$

on démontrerait que $\chi(x, y, z) = \varphi(x, y, z)$; *par suite, les polynomes* φ, ψ, χ *sont identiques.*

6. On peut donner une autre forme à la condition d'intégrabilité du n° **4**; écrivons-la sous la forme

$$m\mathrm{A}f'_x + m\mathrm{B}f'_y + m\mathrm{C}f'_z = \left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial z}\right)(xf'_x + yf'_y + zf'_z + f'_t).$$

Posons maintenant

$$\theta_1 = m\mathrm{A} - x\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial z}\right),$$

$$\theta_2 = m\mathrm{B} - y\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial z}\right),$$

$$\theta_3 = m\mathrm{C} - z\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial z}\right),$$

$$\theta_4 = -\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial z}\right),$$

de telle sorte que l'identité devienne

$$(\alpha) \qquad \theta_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \theta_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \theta_3 \frac{\partial f}{\partial z} + \theta_4 \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

En se reportant aux expressions de A, B, C données au numéro précédent, on voit de suite que les θ sont des polynomes de degré $m - 3$. On aura entre ces polynomes la relation suivante, qui résulte immédiatement de leurs expressions en A, B, C,

$$(\beta) \qquad \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \frac{\partial \theta_2}{\partial y} + \frac{\partial \theta_3}{\partial z} + \frac{\partial \theta_4}{\partial t} = 0.$$

Telles sont les formes élégantes, (α) *et* (β), *sous lesquelles peut se mettre la condition d'intégrabilité pour une intégrale de première espèce;* on devra pouvoir trouver quatre polynomes θ d'ordre $m - 3$ satisfaisant aux conditions (α) et (β).

Nous avons démontré déjà que *la surface la plus générale de degré m ne possède pas d'intégrale de première espèce,* puisque $p_1 = 1$. Nous pouvons le vérifier à un autre point de vue : je dis que $f(x, y, z)$ étant le polynome général d'ordre m, on ne peut pas trouver quatre polynomes θ de degré $m - 3$ vérifiant (α) et (β).

Considérons, en effet, les trois surfaces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Elles n'ont pas de courbes communes, et elles ont en commun un nombre de points distincts égal à $(m-1)^3$. Pour ces points, on a

$$\theta_4 \frac{\partial f}{\partial t} = 0;$$

mais le second facteur ne sera certainement pas nul, puisque alors la surface aurait des points doubles ; les points considérés appartiennent donc à la surface

$$\theta_4 = 0;$$

par suite, les quatre surfaces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \qquad \theta_4 = 0$$

ont en commun $(m-1)^3$ points distincts. Or cela est impossible, car, si nous considérons les deux surfaces de degré $m-1$

$$\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$
$$\alpha' \frac{\partial f}{\partial x} + \beta' \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma' \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

les α, β, γ étant des constantes arbitraires, l'intersection de ces deux surfaces devrait rencontrer la surface θ_4 en $(m-1)^3$ points. Il est d'ailleurs impossible que les deux surfaces précédentes aient une ligne commune avec la surface θ_4, si les α, β, γ sont pris arbitrairement, car il faudrait alors qu'il y eût une ligne commune à $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, et la surface aurait des points multiples à l'intersection de cette ligne avec $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$.

II. — Discussion relative aux points singuliers.

7. Nous venons de trouver les formes nécessaires des intégrales de différentielles totales restant toujours finies. Nous avons maintenant à rechercher si les intégrales remplissant les conditions

précédentes restent toujours finies. Supposons que la surface ne possède que les singularités ordinaires considérées au Chapitre IV (nº 8), c'est-à-dire une ligne double avec des plans tangents en général distincts et des points triples triplanaires qui sont, en même temps, des points triples de la ligne double ; nous traiterons seulement, de plus, le cas des points doubles et des points multiples isolés. Les singularités considérées seront les plus générales de leur type ; ainsi, il peut y avoir sur la courbe double un certain nombre de *points-pince*, c'est-à-dire de points où les plans tangents aux deux nappes de la surface sont confondus ; mais nous pouvons supposer qu'ils sont généraux. Cherchons ce qu'il advient de l'intégrale

$$\int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z},$$

quand (x, y, z) se déplace sur la surface.

Ne considérons d'abord que des points à distance finie. Si (x, y, z) n'est pas un point multiple de la surface, il n'y a aucune difficulté, car on voit que l'intégrale reste finie en employant l'une ou l'autre des trois formes de l'intégrale

$$\int^{(x, y, z)} \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z} = \int^{(x, y, z)} \frac{-C\,dx + A\,dz}{f'_y} = \int^{(x, y, z)} \frac{C\,dy - B\,dz}{f'_x}.$$

Supposons, en second lieu, que (x, y, z) tende vers un point double isolé (a, b, c) de la surface. On remarquera d'abord que les surfaces

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0$$

passent par ce point. Si l'on différentie, en effet, l'identité fondamentale

$$A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} + C\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) f(x, y, z),$$

successivement par rapport à x, y et z, et qu'on fasse $x = a$, $y = b$, $z = c$, on aura

$$\begin{aligned}
A(a, b, c) f''_{a^2} + B(a, b, c) f''_{ab} + C(a, b, c) f''_{ac} &= 0,\\
A(a, b, c) f''_{ab} + B(a, b, c) f''_{b^2} + C(a, b, c) f''_{bc} &= 0,\\
A(a, b, c) f''_{ac} + B(a, b, c) f''_{bc} + C(a, b, c) f''_{c^2} &= 0.
\end{aligned}$$

Le point (a, b, c) n'étant pas un point biplanaire, le déterminant des dérivées secondes n'est pas nul et, par suite,

$$A(a, b, c) = B(a, b, c) = C(a, b, c) = 0.$$

Posons, en supposant le point a, b, c à l'origine des coordonnées, $x = uz$, $y = vz$ et soit

$$f(x, y, z) = \varphi_2(x, y, z) + \varphi_3(x, y, z) + \ldots;$$

l'intégrale peut s'écrire

$$\int \frac{(A - Cu)\,dz - Cz\,du}{z[\varphi'_{2,v}(u, v, 1) + z\varphi'_{3,v}(u, v, 1) + \ldots]}.$$

Or, A et C sont divisibles par z quand on a posé $x = uz$, $y = vz$. Nous aurons donc une expression de la forme

$$\int \frac{A_1\,dz - C_1 z\,du}{\varphi'_{2,v}(u, v, 1) + z\varphi'_{3,v}(u, v, 1) + \ldots};$$

c'est une intégrale de différentielle totale pour la surface Σ définie par la relation entre u, v, z,

$$\varphi_2(u, v, 1) + z\varphi_3(u, v, 1) + \ldots = 0,$$

et l'on a à considérer les points de cette surface $(u, v, 0)$ satisfaisant à

$$\varphi_2(u, v, 1) = 0.$$

Tous ces points sont pour Σ des points simples, et nous sommes, par suite, assuré que l'intégrale reste finie. On peut se demander *si l'intégrale tend toujours vers la même limite de quelque manière que* (x, y, z) *se rapproche de zéro;* il en est effectivement ainsi, car tout cycle infiniment petit donne une période nulle. En effet, au point double de la surface initiale correspond dans Σ la conique

$$\varphi_2(u, v, 1) = 0,$$

et un cycle infiniment petit correspond à un cycle de la surface de Riemann représentée par cette équation qui est de genre zéro; les cycles infiniment petits de la surface se réduisent donc à zéro. On peut encore arriver autrement au même résultat en

remarquant que l'intégrale

$$\int \frac{A_1\,dz - C_1\,z\,du}{\varphi'_{2,v}(u, v, 1) + z(\quad)}$$

est très petite si l'on intègre entre deux valeurs (z_0, u_0, v_0), (z, u, v), z et z_0 étant très petits, et z restant petit sur la courbe d'intégration. Il en est bien ainsi si, sur cette courbe, on n'a pas

$$\varphi'_{2,v}(u, v, 1) = 0;$$

mais, dans le cas où il en serait autrement, on éviterait la difficulté en prenant une des autres formes de l'intégrale.

On étudierait de la même manière le cas d'un point singulier isolé général d'ordre p, où le cône des tangentes est irréductible. Pour que l'intégrale

$$\int \frac{-C\,dx + A\,dz}{f'_y}$$

reste finie pour toute section plane, il faut évidemment que les surfaces

$$A = 0, \qquad C = 0$$

aient au point multiple d'ordre p un point multiple d'ordre $p - 1$. Nous admettons donc que les trois surfaces

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0$$

ont, au point multiple d'ordre p de la surface f, un point multiple d'ordre $p - 1$. L'équation de la surface étant alors de la forme

$$f(x, y, z) = \varphi_p(x, y, z) + \varphi_{p+1}(x, y, z) + \ldots = 0,$$

nous aurons, en posant encore

$$x = uz, \qquad y = vz,$$

l'intégrale

$$\int \frac{(A - Cu)\,dz - Cz\,dz}{z^p[\varphi'_{p,v}(u, v, 1) + z\,\varphi'_{p+1,v}(u, v, 1) + \ldots]},$$

et, comme $A - Cu$ et Cz sont divisibles par z^{p-1}, nous sommes ramené à une intégrale de différentielle totale pour la surface définie par la relation entre u, v, z

$$\varphi_p(u, v, 1) + z\,\varphi_{p+1}(u, v, 1) + \ldots = 0,$$

et nous n'avons à considérer que des points simples de cette surface, si les points multiples de la courbe

$$\varphi_p(u, v, 1) = 0,$$

donnent

$$\varphi_{p+1}(u, v, 1) \neq 0,$$

comme nous devons le supposer, si le point multiple n'est pas spécial.

8. Étudions maintenant la valeur de l'intégrale quand (x, y, z) se rapproche d'un point de la courbe double de la surface. Il faudra nécessairement, pour que l'intégrale reste finie, que les surfaces

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0$$

passent par la courbe double. Nous adjoindrons donc ces conditions, et nous allons montrer que l'intégrale reste alors finie.

Un premier cas, très simple, est celui où l'on considère un point de la courbe double pour lequel les deux plans tangents sont distincts. Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un tel point P de la courbe double; par ce point passent deux nappes de la surface ayant, par hypothèse, deux plans tangents différents. Supposons que (x, y, z) tende vers P en restant sur une certaine nappe; le plan tangent à cette nappe en P n'est pas parallèle, nous pouvons le supposer, à l'axe des z. Pour la première nappe, on aura, dans le voisinage de (x_1, y_1, z_1),

$$z - z_1 = a(x - x_1) + b(y - y_1) + \varphi(x - x_1, y - y_1),$$

φ ne renfermant que des termes de degré supérieur au premier. Pour l'autre nappe, on aura pareillement

$$z - z_1 = a'(x - x_1) + b'(y - y_1) + \psi(x - x_1, y - y_1),$$

et l'on n'a pas à la fois

$$a = a', \qquad b = b'.$$

L'équation de la surface pourra évidemment se mettre sous la forme

$$f(x, y, z) = [z - z_1 - a(x - x_1) - b(y - y_1) - \varphi]$$
$$[z - z_1 - a'(x - x_1) - b'(y - y_1) - \psi] \times F,$$

F ayant une valeur finie et différente de zéro pour $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$. On en conclut que, pour tout point (x, y, z) de la première nappe, on a

$$f'_z(x, y\, z) = [(a - a')(x - x_1) + (b - b')(y - y_1) + \varphi - \psi] \times F.$$

L'équation de la projection de la courbe double sur le plan des (x, y) est

$$(a - a')(x - x_1) + (b - b')(y - y_1) + \varphi - \psi = 0,$$

et l'on n'a pas à la fois $a - a' = 0$, $b - b' = 0$; soit par exemple $b - b' \neq 0$. On pourra tirer de l'équation précédente

$$y - y_1 = P(x - x_1),$$

P étant une série, sans terme constant, ordonnée suivant les puissances de $x - x_1$. Ceci posé, si

$$A(x, y, z) = 0$$

représente une surface passant par la courbe double, on pourra écrire pour les points de la première nappe

$$A(x, y, z) = \chi(x - x_1, y - y_1),$$

et cette fonction holomorphe en $x - x_1$ et $y - y_1$ sera identiquement nulle, quand on remplacera $y - y_1$ par $P(x - x_1)$. On aura donc

$$A(x, y, z) = [y - y_1 - P(x - x_1)]\chi_1(x - x_1, y - y_1).$$

D'autre part, d'après ce qui a été dit plus haut,

$$f'_z(x, y, z) = F_1 \times [y - y_1 - P(x - x_1)],$$

F_1 ne s'annulant pas pour $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$. Donc le quotient

$$\frac{A(x, y, z)}{f'_z},$$

tendra vers une valeur finie déterminée différente de zéro quand (x, y, z) tendra vers P, en étant sur l'une ou l'autre nappe de la

surface. Il est manifeste alors que l'intégrale

$$\int_{x_0, y_0, z_0}^{(x, y, z)} \frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z},$$

tend vers une valeur finie déterminée quand (x, y, z) tend vers (x_1, y_1, z_1).

L'analyse précédente n'est plus applicable quand (x_1, y_1, z_1) est un *point-pince* de la surface. Nous ne diminuerons pas la généralité en supposant que la courbe double est l'axe des z, le point-pince étant l'origine avec le plan des zx comme plan tangent double; l'équation de la surface est alors

$$[\alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots]x^2 + [\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \ldots]xy$$
$$+ [a + \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \ldots]y^2 = 0.$$

On a nécessairement $a \neq 0$, et pour un point-pince non spécial, nous devons supposer $\gamma \neq 0$.

Posons $y = ux$, nous aurons, entre u, x et z, l'équation

$$(\Sigma')\quad \left\{ \begin{aligned} &[(\alpha + \beta u)x + \gamma z + \ldots] + [(\alpha' + \beta' u)x + \gamma' z + \ldots]u \\ &\qquad + [a + (\alpha'' + \beta'' u)x + \gamma'' z + \ldots]u^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

et l'intégrale devient

$$(\alpha)\qquad \int \frac{(B - A u)\,dx - A x\,du}{x^2[\gamma + \ldots + (\gamma' + \ldots)u + (\gamma'' + \ldots)u^2]}:$$

A contient x en facteur quand on pose $y = ux$, puisque la surface

$$A(x, y, z) = 0$$

passe par l'axe des z. D'autre part quand, dans $B - Au$, on remplace z par le développement holomorphe en x et u, tiré de l'équation (Σ') entre z, x et u, on devra avoir x^2 en facteur; en effet, pour une valeur constante suffisamment petite donnée à u, on a une section de la surface par le plan $y = ux$, et cette section passe par le point

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = z_0,$$

z_0 étant la racine voisine de zéro de l'équation (Σ') quand on fait $x = 0$. L'intégrale

$$\int \frac{(B - A u)\,dx}{x^2[\gamma + \ldots + (\gamma' + \ldots)u + (\gamma'' + \ldots)u^2]}$$

doit, pour cette section, rester finie quand x tend vers zéro. Par conséquent, $B - Au$ doit contenir x^2 en facteur. Il résulte de là que l'intégrale de différentielle totale (α) reste finie quand x, z, u tendent vers zéro en satisfaisant à l'équation (Σ').

9. Supposons maintenant que (x, y, z) tende vers un point triple de la courbe double. Nous ne diminuons pas la généralité en supposant que la courbe double se compose des axes des x, des y et des z, le point triple étant l'origine. Nous avons alors l'équation

$$(S) \qquad f(x, y, z) = xyz + \varphi_4(x, y, z) + \varphi_5(x, y, z) + \ldots = 0,$$

et chacun des cônes $\varphi_i(x, y, z) = 0$ admet comme lignes doubles les axes de coordonnées; ainsi on a

$$\varphi_4(x, y, z) = \alpha x^2yz + \beta xy^2z + \gamma xyz^2 + \delta y^2z^2 + \varepsilon z^2x^2 + \eta x^2y^2.$$

Posons

$$x = uz, \qquad y = vz,$$

nous avons la relation entre u, v, z

$$(\Sigma) \qquad uv + z\varphi_4(u, v, 1) + \ldots = 0.$$

Supposons d'abord que u et v ne tendent pas tous les deux vers zéro; soit v tendant vers v_0 différent de zéro, et u tendant vers zéro. Le point $u = 0$, $v = v_0$, $z = 0$ sera un point simple pour la surface définie par l'équation précédente entre u, v et z, et, en prenant l'intégrale sous la forme

$$\int \frac{C\,dy - B\,dz}{f'_x},$$

on voit immédiatement, en se rappelant que $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ ont pour point double le point $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, puisque ces surfaces passent par les trois axes, que l'intégrale reste finie dans le voisinage du point simple $u = 0$, $v = v_0$, $z = 0$ de la surface Σ.

Le même raisonnement n'est plus applicable quand u et v tendent vers zéro simultanément. On remarque alors que la droite

$$u = 0, \qquad v = 0$$

est une ligne double pour la surface Σ. Au point $u = 0$, $v = 0$, $z = 0$ de cette surface les plans tangents sont $u = 0$, $v = 0$; l'intégrale peut s'écrire

$$\frac{Cz\,dv + (Cv - B)\,dz}{z^2[v + z(\quad)]}.$$

Or, C et $Cv - B$ sont divisibles par z quand on a remplacé x et y par uz et vz; nous retombons donc sur une intégrale de différentielle totale relative à une surface pour un point (non *pince*) de la courbe double. Elle restera finie si les deux polynomes

$$\frac{Cz}{z^2}, \quad \frac{Cv - B}{z^2}.$$

s'annulent pour $u = 0$, $v = 0$; il en est bien ainsi puisque les deux surfaces $C = 0$, $B = 0$ passent par l'axe des z, c'est-à-dire sont de la forme $Mx + Ny$, M et N étant des polynomes en x, y, z. Ainsi, nous sommes assuré que *l'intégrale restera finie pour le point triple.*

10. Il reste à étudier l'intégrale quand les variables deviennent infinies. Nous allons, dans ce but, transformer l'intégrale en nous servant des coordonnées homogènes. Remplaçons donc x, y, z par $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$, et rappelons-nous que nous avons trouvé

$$A = x\,\varphi(x, y, z) + A_1(x, y, z),$$
$$B = y\,\varphi(x, y, z) + B_1(x, y, z).$$

Nous aurons donc, en rendant les polynomes homogènes,

$$\frac{B\,dx - A\,dy}{f'_z(x, y, z)} = \frac{\left\{\begin{array}{l}\;\;[y\,\varphi(x, y, z) + tB_1(x, y, z, t)](t\,dx - x\,dt)\\ -[x\,\varphi(x, y, z) + tA_1(x, y, z, t)](t\,dy - y\,dt)\end{array}\right\}}{t f'_z(x, y, z, t)},$$

expression qui pourra s'écrire, après quelques transformations très simples, sous la forme

$$\frac{-(x\,dy - y\,dx)(x\varphi + tA_1) + (A_1 y - B_1 x)(x\,dt - t\,dx)}{x f'_z(x, y, z, t)}.$$

Or x, y, z, t, ne sont pas nuls à la fois, soit $x \neq 0$: posons

$$\frac{y}{x} = Y, \qquad \frac{z}{x} = Z, \qquad \frac{t}{x} = T,$$

l'expression différentielle deviendra

$$\frac{-[\varphi(1,Y,Z)+TA_1(1,Y,Z,T)]dY+[YA_1(1,Y,Z,T)-B_1(1,Y,Z,T)]dT}{f'_z(1,Y,Z,T)},$$

et nous sommes ramené à une intégrale de même forme que celle qui a été étudiée précédemment. L'intégrale restera donc finie pour les points à l'infini de la surface.

III. — Quelques applications des généralités précédentes.

11. Nous avons achevé, en nous bornant, comme il suffit, aux singularités les plus simples, la discussion des intégrales de première espèce. Étudions maintenant quelques cas particuliers, et citons d'abord des surfaces étendues, admettant des intégrales de première espèce.

Soient

$$\varphi(\alpha,\beta)=0, \qquad \psi(\alpha',\beta')=0$$

les équations de deux courbes de genres p et p' respectivement. Considérons une surface S définie par les équations

$$x = F(\alpha,\beta,\alpha',\beta'),$$
$$y = F_1(\alpha,\beta,\alpha',\beta'),$$
$$z = F_2(\alpha,\beta,\alpha',\beta'),$$

les F étant rationnels par rapport aux α et aux β; nous supposons de plus qu'à un point *arbitraire* de la surface ne correspond qu'*un seul* système de valeurs de (α,β) et (α',β'). On aura ainsi

$$\alpha = R(x,y,z),$$
$$\beta = R_1(x,y,z),$$

R et R_1 étant rationnels en x, y et z, et si

$$\int\lambda(\alpha,\beta)\,d\alpha$$

représente une intégrale de première espèce de la courbe φ, cette intégrale deviendra, en remplaçant α et β par leurs valeurs, une expression de la forme

$$\int P\,dx + Q\,dy,$$

où P et Q seront rationnels en x, y et z : ce sera une intégrale de différentielle totale de première espèce pour la surface S. On aura ainsi $p+p'$ intégrales de première espèce : elles sont linéairement indépendantes, mais deux intégrales de la première série sont fonctions l'une de l'autre, ainsi que deux intégrales de la seconde série. On voit aisément qu'il n'y a pas, pour la surface, d'autres intégrales de première espèce; une telle intégrale est, en effet, nécessairement de la forme

$$\int M(\alpha, \beta, \alpha', \beta')\, d\alpha + N(\alpha, \beta, \alpha', \beta')\, d\alpha',$$

M et N étant rationnels. Or, pour une valeur constante donnée à (α', β'), l'expression

$$\int M(\alpha, \beta, \alpha', \beta')\, d\alpha$$

doit être une intégrale de première espèce de la courbe φ ; donc $M(\alpha, \beta, \alpha', \beta')$ est de la forme

$$A_1 \frac{Q_1(\alpha, \beta)}{f_\beta} + \ldots + A_p \frac{Q_p(\alpha, \beta)}{f'_\beta},$$

les A dépendant rationnellement de (α', β'). Or, si les A dépendent effectivement de (α', β'), l'intégrale deviendra infinie pour un système de valeur de (α', β') au moins, et, par suite, les A doivent être nécessairement des constantes. On verrait qu'il en est de même, en permutant (α, β) et (α', β'), pour l'expression de N, et finalement l'intégrale est une somme des intégrales précédemment indiquées, multipliées par des coefficients constants.

12. Faisons de suite une remarque générale sur les intégrales de différentielles totales de première espèce, dans le cas où la surface jouirait de la propriété suivante. Je suppose qu'il y ait sur la surface une famille de courbes *unicursales* telles que, par chaque point de la surface, passe une courbe de cette famille. Soit, dans ces conditions,

$$\int P\, dx + Q\, dy$$

une intégrale de première espèce. Pour une courbe de la famille

indiquée x, y, z s'expriment rationnellement en fonction d'un paramètre; en substituant ces valeurs dans l'intégrale, on ne peut avoir une intégrale rationnelle qui soit de première espèce : le résultat de la substitution ne peut être que *zéro* ou *l'infini*. Or, P et Q ne deviennent infinis que le long de courbes *isolées* de la surface, tandis que nous considérons ici une famille d'unicursales dépendant d'un paramètre arbitraire. On aura donc, pour toute courbe de cette famille,

$$P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Par suite, *la famille d'unicursales représentera l'intégrale générale de cette équation différentielle ordinaire du premier ordre entre x et y.*

Il résulte de là que, si la surface a une seconde intégrale de première espèce

$$\int P_1\,dx + Q_1\,dy,$$

cette intégrale sera fonction de la première; en effet, l'équation différentielle

$$P_1\,dx + Q_1\,dy = 0$$

ayant la même intégrale générale que l'équation analogue relative à la première intégrale, on aura nécessairement, pour tout point de la surface,

$$PQ_1 - P_1Q = 0,$$

ce qui montre bien que les deux intégrales sont fonctions l'une de l'autre.

On obtient un exemple de surfaces jouissant de la propriété indiquée en supposant, au numéro précédent, que le genre p' de la courbe ψ est nul; nous avons alors des surfaces définies par les équations

$$\begin{aligned} x &= F(\alpha, \beta, \theta), \\ y &= F_1(\alpha, \beta, \theta) \qquad \varphi(\alpha, \beta) = 0, \\ z &= F_2(\alpha, \beta, \theta), \end{aligned}$$

et cela de telle manière qu'à un point arbitraire (x, y, z) de la surface corresponde un seul système de valeurs pour (α, β) et θ. Pour $\alpha = \text{const.}$, on aura une famille d'unicursales, et les inté-

grales de première espèce

$$\int \lambda(\alpha, \beta)\, d\alpha$$

jouissent bien de la propriété qui vient d'être établie.

13. Les surfaces unicursales, c'est-à-dire les surfaces pour lesquelles les coordonnées s'expriment en fonctions rationnelles de deux paramètres, n'ont évidemment pas d'intégrales de différentielles totales de première espèce. Par suite, les surfaces du second degré et les surfaces du troisième degré étant unicursales, à l'exception des cônes du troisième degré, n'auront pas de telles intégrales. Au contraire, une surface du quatrième degré peut avoir une intégrale de première espèce. Prenons la surface du quatrième degré de révolution autour de l'axe des z

$$(x^2+y^2)^2+(x^2+y^2)f_2(z)+f_4(z)=0,$$

f_2 et f_4 étant des polynomes en z du second et du quatrième degré. Cette surface admet, en général, une intégrale de première espèce; considérons, en effet, la courbe entre u et z

$$u^2+uf_2(z)+f_4(z)=0.$$

Si f_2 et f_4 sont des polynomes arbitraires des degrés indiqués, cette courbe sera du genre *un*. Soit

$$\int R(u, z)\, du$$

son intégrale de première espèce; en remplaçant u par x^2+y^2, on aura une intégrale de première espèce relative à la surface de révolution.

Cette surface n'aura pas une seconde intégrale de première espèce; il y a, en effet, sur la surface une famille de cercles dépendant d'un paramètre arbitraire; ce sont les courbes $u=$ const. Si donc, l'intégrale

$$\int P\, dx + Q\, dy$$

représente une intégrale de première espèce, il faut que pour tous ces cercles, qui sont des courbes unicursales, on ait, d'après

le numéro précédent,

$$P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Par suite, l'élément différentiel doit être de la forme

$$P\,dx + Q\,dy = \lambda\,du,$$

λ étant une fonction rationnelle de x, y et z. Or $\lambda(x, y, z)$ peut être regardée comme une fonction de u, z et x, u et x étant les deux variables indépendantes, et z étant une fonction de u. Puisque

$$\lambda(u, z, x)\,du$$

est une différentielle totale exacte, c'est que λ ne contient pas x; donc la fonction rationnelle λ de x, y, z ne doit dépendre que de u et z, et nous retombons sur l'intégrale obtenue.

Citons d'autres surfaces du quatrième ordre admettant une intégrale de première espèce; ce sont les surfaces du quatrième ordre ayant deux droites doubles ne se rencontrant pas. Soit le tétraèdre de référence

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad t = 0;$$

l'équation générale d'une surface du quatrième degré admettant les droites doubles

$$x = 0, \quad y = 0 \quad \text{et} \quad z = 0, \quad t = 0,$$

sera

$$(Pz^2 + Qzt + Rt^2)x^2 + 2(P'z^2 + Q'zt + R't^2)xy + (P''z^2 + Q''zt + R''t^2)y^2 = 0,$$

où les deux droites doubles sont en évidence. Si, en coordonnées non homogènes, une des droites doubles est l'axe des z, la seconde droite étant à l'infini dans le plan $z = 0$, l'équation de la surface se déduira de la précédente en faisant $t = 1$, et se réduira par suite à

$$(Pz^2 + Qz + R)x^2 + 2(P'z^2 + Q'z + R')xy + (P''z^2 + Q''z + R'')y^2 = 0.$$

Cette surface est évidemment réglée, les droites étant données par les sections $z =$ const. Il y a, sur l'axe des z, quatre points-pince, qui correspondent aux valeurs de z, pour lesquelles on a

$$\varphi(z) = (P'z^2 + Q'z + R')^2 - (Pz^2 + Qz + R)(P''z^2 + Q''z + R'') = 0.$$

La surface précédente rentre dans la catégorie des surfaces considérée au paragraphe précédent. Posons en effet

$$y = \lambda x.$$

L'équation de la surface nous donnera

$$\lambda = -(P'z^2 + Q'z + R') + \sqrt{\varphi(z)}.$$

Nous avons par suite, pour les coordonnées d'un point de la surface,

$$\begin{aligned} x &= x, \\ y &= [-(P'z^2 + Q'z + R') + \sqrt{\varphi(z)}]x, \\ z &= z; \end{aligned}$$

les coordonnées s'expriment rationnellement en fonction de x, z, $\sqrt{\varphi(z)}$, et à un point arbitraire (x, y, z) de la surface ne correspond qu'un système de valeur de x, z, $\sqrt{\varphi(z)}$. La surface admet donc l'intégrale de première espèce

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}}.$$

14. Il est aisé de trouver toutes les surfaces du quatrième degré admettant une intégrale de première espèce. La question revient à la discussion d'un système très simple d'équations différentielles; on doit avoir quatre polynomes θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 du premier degré

$$\begin{aligned} \theta_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t, \\ \theta_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t, \\ \theta_3 &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 t, \\ \theta_4 &= a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 t, \end{aligned}$$

tels, que l'on ait identiquement

$$\theta_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \theta_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \theta_3 \frac{\partial f}{\partial z} + \theta_4 \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

avec la condition

$$a_1 + b_2 + c_3 + d_4 = 0.$$

Pour trouver la forme générale des fonctions f satisfaisant à la première de ces relations, il suffit de trouver trois intégrales distinctes.

Or il résulte d'une théorie classique qu'on peut obtenir des intégrales de la forme

$$\frac{P^{\lambda_2}}{Q^{\lambda_1}}, \quad \frac{R^{\lambda_2}}{Q^{\lambda_3}}, \quad \frac{S^{\lambda_2}}{Q^{\lambda_4}},$$

P, Q, R, S désignant quatre polynomes du premier degré, homogènes en x, y, z, t et les λ étant les racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - \lambda & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

et il résulte de la relation $a_1 + b_2 + c_3 + d_4 = 0$ que l'on doit avoir

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0.$$

C'est seulement quand les quatre racines sont distinctes que l'on est assuré d'avoir trois solutions distinctes de la forme indiquée. Quand les racines ne sont pas toutes distinctes, on pourrait avoir des logarithmes dans les expressions d'une au moins des intégrales ; mais ceci ne nous conduirait pas à des surfaces algébriques. Nous devons donc supposer qu'il ne s'introduit pas de logarithmes; de plus, les quatre polynomes P, Q, R, S doivent être linéairement indépendants, *sans quoi nous aurions une surface conique*, ce que nous excluons. On peut par conséquent poser

$$P = x, \qquad Q = y, \qquad R = z, \qquad S = t;$$

nous avons alors les solutions

$$\frac{x^{\lambda_2}}{y^{\lambda_1}}, \quad \frac{z^{\lambda_2}}{y^{\lambda_3}}, \quad \frac{t^{\lambda_2}}{y^{\lambda_4}},$$

et, par suite, notre polynome du quatrième degré $f(x, y, z, t)$ doit être de la forme

$$f(x, y, z, t) = \varphi\left(\frac{x^{\lambda_2}}{y^{\lambda_1}}, \frac{z^{\lambda_2}}{y^{\lambda_3}}, \frac{t^{\lambda_2}}{y^{\lambda_4}}\right).$$

Si l'on prend

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 0, \qquad \lambda_4 = 0,$$

on aura l'expression

$$\varphi(xy. z, t),$$

et, si l'on veut que celle-ci soit un polynome du quatrième degré, ce polynome sera nécessairement

$$x^2y^2 + xy(Az^2 + Bzt + Ct^2) + A'z^4 + B'z^3t + C'z^2t^2 + D'zt^3 + E't^4 :$$

nous retombons sur les surfaces de révolution, qui se déduisent de cette forme en remplaçant x et y respectivement par $x + iy$ et $x - iy$.

Faisons en second lieu

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1, \quad \lambda_4 = -1,$$

ce qui nous conduit à l'expression

$$\varphi\left(\frac{x}{y}, zy, ty\right) :$$

si elle représente un polynome du quatrième degré, il sera nécessairement de la forme

$$\frac{x^2}{y^2}(Pz^2y^2 + Qzy\,ty + Rt^2y^2)$$
$$+ 2\frac{x}{y}(P'z^2y^2 + Q'zy\,ty + R't^2y^2) + P''z^2y^2 + Q''zy\,ty + R''t^2y^2,$$

ce qui nous ramène à la forme

$$x^2(Pz^2 + Qzt + Rt^2) + 2xy(P'z^2 + Q'zt + R't^2) + y^2(P''z^2 + Q''z + R''),$$

et, par suite, aux surfaces du quatrième degré avec deux droites doubles.

Une discussion un peu minutieuse, que nous ne ferons pas ici, montre qu'il n'y a pas, en dehors des cônes, d'autres surfaces ayant une intégrale de première espèce que les deux surfaces trouvées plus haut et, bien entendu, toutes leurs transformées homographiques. Ce résultat a été énoncé sans démonstration par M. Poincaré, dans une Note des *Comptes rendus* (t. XCIX).

15. Nous ferons maintenant quelques remarques relatives au cas où une surface de degré m

$$f(x, y, z) = 0$$

possède plusieurs intégrales de première espèce, qui ne soient pas fonctions les unes des autres; A, B, C et A_1, B_1, C_1 étant les

polynomes correspondants, nous aurons les deux identités

$$A\frac{\partial f}{\partial x}+B\frac{\partial f}{\partial y}+C\frac{\partial f}{\partial z}=\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)f(x,y,z),$$
$$A_1\frac{\partial f}{\partial x}+B_1\frac{\partial f}{\partial y}+C\frac{\partial f}{\partial z}=\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial B_1}{\partial y}+\frac{\partial C_1}{\partial z}\right)f(x,y,z).$$

Nous supposons que les deux intégrales

$$\int\frac{B\,dx-A\,dy}{f'_z}\quad \text{et}\quad \int\frac{B_1\,dx-A_1\,dy}{f'_z}$$

ne sont pas fonctions l'une de l'autre, c'est-à-dire que l'on n'a pas pour tous les points de f

$$BA_1-AB_1=0.$$

Ceci posé, nous aurons pour tout point de la surface les relations

$$A\frac{\partial f}{\partial x}+B\frac{\partial f}{\partial y}+C\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$
$$A_1\frac{\partial f}{\partial x}+B_1\frac{\partial f}{\partial y}+C_1\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{AB_1-A_1B}{f'_z}=\frac{BC_1-CB_1}{f'_x}=\frac{CA_1-AC_1}{f'_y}.$$

Montrons que la valeur commune de ces quotients peut se mettre sous la forme d'un polynome en x, y, z. Tout d'abord, chacun de ces quotients restera fini pour tout point simple de la surface à distance finie. Prenons maintenant un point de la courbe double : il n'y a aucune difficulté pour un point qui n'est pas un point-pince; il suffit en effet de raisonner comme au n° 8 : on aura un facteur commun au numérateur et au dénominateur, et, de plus, on remarquera que le quotient considéré s'annulera au point considéré. Donnons à y une valeur constante différente de l'y d'un point-pince; la courbe entre x et z

$$AB_1-A_1B=0$$

a pour points doubles les points doubles de $f(x,\bar{y},z)=0$. On peut par suite, d'après une proposition connue relative à la théorie

des courbes [1], mettre $AB_1 - A_1B$ sous la forme

$$AB_1 - A_1B = \lambda(x, z) f'_z + \mu(x, z) f(x, y, z),$$

λ et μ étant des fonctions entières de x et z, dont les coefficients pourraient être des fractions rationnelles de y. Nous pouvons donc écrire

$$\frac{AB_1 - A_1B}{f'_z} = \frac{P(x, y, z)}{\varphi(y)},$$

$P(x, y, z)$ étant un polynome en x, y, z. On verrait de même que

$$\frac{AB_1 - A_1B}{f'_z} = \frac{P_1(x, y, z)}{\varphi_1(x)}.$$

On peut d'ailleurs supposer que, dans P et P_1, z entre au plus au degré $m - 1$. On a alors

$$\frac{P(x, y, z)}{\varphi(y)} = \frac{P_1(x, y, z)}{\varphi_1(x)},$$

et ceci doit être une identité, quels que soient x, y et z, puisque z figure seulement au degré $m - 1$. On aura donc, pour

$$\frac{AB_1 - A_1B}{f'_z},$$

---

[1] On sait que Nœther a donné d'une manière générale (*Math. Annalen*, t. VI) la condition pour que, étant donnés deux polynomes $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$, un polynome $f(x, y)$ puisse se mettre sous la forme

$$A\varphi + B\psi,$$

A et B étant eux-mêmes des polynomes. Il en a déduit en particulier un théorème donnant une condition *suffisante* pour que f puisse se mettre sous la forme indiquée. Considérons les deux courbes

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad \psi(x, y) = 0$$

et prenons un quelconque de leurs points de rencontre, que nous désignerons par M; soient p et q les degrés respectifs de multiplicité de ce point pour les deux courbes, et supposons de plus que ce point compte pour pq points de rencontre (cas général). Dans ces conditions, si la courbe

$$f(x, y) = 0$$

a le point M comme point multiple d'ordre $p + q - 1$, on aura certainement

$$f(x, y) = A\varphi + B\psi.$$

un polynome en x, y, z, et nous pouvons par suite écrire

$$AB_1 - A_1 B = f'_z Q(x, y, z),$$

Q étant un polynome. Le degré de ce polynome sera $m - 4$; on voit en effet, en se reportant aux formes de A, B, C, que les polynomes figurant dans les premiers membres de la relation précédente sont de degré $2m - 5$.

La surface d'ordre $m - 4$

$$Q(x, y, z) = 0$$

est extrêmement intéressante; nous rencontrons ici pour la première fois, dans un cas particulier, une de ces surfaces d'ordre $m - 4$, que nous allons bientôt étudier d'une manière générale, et qui sont dites *adjointes* à la surface proposée. La surface Q passe par les lignes doubles de la surface, puisque les A et les B s'annulent pour les points de ces lignes doubles. Les surfaces A et B ayant pour points doubles un point triple de la courbe double, il est manifeste que la surface Q aura un tel point pour point double.

16. Ces remarques faites, cherchons si une surface du quatrième degré peut avoir deux intégrales de seconde espèce qui ne soient pas fonctions l'une de l'autre. Nous allons voir de suite que la chose est impossible. D'après ce que nous venons de dire, on a

$$\begin{aligned} AB_1 - A_1 B - Q f'_z &= 0, \\ BC_1 - CB_1 - Q f'_x &= 0, \\ CA_1 - AC_1 - Q f'_y &= 0. \end{aligned}$$

Q, qui est d'ordre $m - 4$, se réduira ici à une constante différente de zéro, puisque, par hypothèse, les deux intégrales ne sont pas fonctions l'une de l'autre. Ces relations ne sont, en général, satisfaites que pour les points de la surface; mais, dans le cas actuel, ce seront des identités, puisque le premier membre de chacune d'elles est un polynome de degré inférieur à 4. On a donc l'identité

$$A \frac{\partial f}{\partial x} + B \frac{\partial f}{\partial y} + C \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

quels que soient x, y, z. Par suite, on a cette autre identité en x,

y, z

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Reportons-nous maintenant aux conditions, mises sous forme homogène, pour que la surface ait une intégrale de première espèce. On a

$$\theta_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \theta_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \theta_3 \frac{\partial f}{\partial z} + \theta_4 \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

et θ_4 a pour expression

$$\theta_4 = -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right);$$

on aura par conséquent $\theta_4 = 0$; mais θ_4 est en définitive un quelconque des polynomes θ, et nous arrivons ainsi à cette conclusion absurde

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 0.$$

L'hypothèse faite était donc inadmissible : *une surface du quatrième degré ne peut avoir deux intégrales de première espèce qui ne soient pas fonctions l'une de l'autre.*

17. La même conclusion va s'étendre à une classe très étendue de surfaces du *cinquième* degré. Considérons une surface du cinquième degré ayant deux intégrales de seconde espèce qui ne sont pas fonctions l'une de l'autre.

On aura, d'après ce qui a été dit précédemment,

$$(1)\quad \begin{cases} AB_1 - BA_1 = Qf'_z + \nu f(x, y, z), \\ BC_1 - CB_1 = Qf'_x + \lambda f(x, y, z), \\ CA_1 - AC_1 = Qf'_y + \mu f(x, y, z), \end{cases}$$

Q étant un polynome du premier degré, et λ, μ, ν représentant trois constantes. De ces trois identités, en tenant compte des identités fondamentales

$$A \frac{\partial f}{\partial x} + B \frac{\partial f}{\partial y} + C \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) f(x, y, z),$$

$$A_1 \frac{\partial f}{\partial x} + B_1 \frac{\partial f}{\partial y} + C_1 \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y} + \frac{\partial C_1}{\partial z}\right) f(x, y, z),$$

on déduit

$$(2)\quad \begin{cases} Q\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)+\lambda A+\mu B+\nu C=0,\\ Q\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial B_1}{\partial y}+\frac{\partial C_1}{\partial z}\right)+\lambda A_1+\mu B_1+\nu C_1=0.\end{cases}$$

Les constantes λ, μ, ν sont reliées très simplement au polynome Q. Posons, comme nous devons le faire,

$$\begin{aligned} A&=x\varphi(x,y,z)+L(x,y,z), & A_1&=x\varphi_1(x,y,z)+L_1(x,y,z),\\ B&=y\varphi(x,y,z)+M(x,y,z), & B_1&=x\varphi_1(x,y,z)+M_1(x,y,z),\\ C&=z\varphi(x,y,z)+N(x,y,z), & C_1&=z\varphi_1(x,y,z)+N_1(x,y,z),\end{aligned}$$

et admettons d'abord que φ et φ_1 ne soient pas identiquement nuls : soit $\varphi\neq 0$. Dans la première des équations (2), en posant

$$Q=lx+my+nz+p,$$

les termes du degré le plus élevé seront

$$\varphi\times[5(lx+my+nz)+\lambda x+\mu y+\nu z]:$$

on en conclut

$$\lambda=-5\frac{\partial Q}{\partial x},\qquad \mu=-5\frac{\partial Q}{\partial y},\qquad \nu=-5\frac{\partial Q}{\partial z}.$$

La même conclusion subsiste si φ et φ_1 sont identiquement nuls. Considérons, en effet, dans ce cas, les relations (1); les premiers membres seront du quatrième degré, et l'on aura, par suite, en désignant par $\psi(x,y,z)$ les termes homogènes du cinquième degré dans f,

$$\begin{aligned}(lx+my+nz)\psi'_z+\nu\psi&=0,\\ (lx+my+nz)\psi'_x+\lambda\psi&=0,\\ (lx+my+nz)\psi'_y+\mu\psi&=0;\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$5(lx+my+nz)=-(\lambda x+\mu y+\nu z),$$

et la conclusion subsiste.

Nous pouvons admettre, en faisant un changement d'axes, que Q se réduise à z. Les équations (1) se réduisent alors à

$$(3)\quad \begin{cases} AB_1-BA_1=zf'_z-5f(x,y,z),\\ BC_1-CB_1=zf'_x,\\ CA_1\quad AC_1=zf'_y.\end{cases}$$

et les équations (2) deviennent

$$z\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)-5C=0,$$
$$z\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial B_1}{\partial y}+\frac{\partial C_1}{\partial z}\right)-5C_1=0.$$

Nous avons pour A, B, C et A_1, B_1, C_1 les expressions indiquées plus haut. En les introduisant dans ces dernières équations, il vient

$$z\left(\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}\right)-5N=0,$$
$$z\left(\frac{\partial L_1}{\partial x}+\frac{\partial M_1}{\partial y}+\frac{\partial N_1}{\partial z}\right)-5N_1=0.$$

Si donc nous posons

$$L=a_0z^2+a_1z+a_2,\qquad M=b_0z^2+b_1z+b_2,$$

où les a et b sont des polynomes en x et y, de degré marqué par l'indice, on aura

$$N=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial a_1}{\partial x}+\frac{\partial b_1}{\partial y}\right)z^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x}+\frac{\partial b_2}{\partial y}\right)z,$$

et de même, en posant

$$L_1=a'_0z^2+a'_1z+a'_2,\qquad M_1=b'_0z^2+b'_1z+b'_2,$$

il viendra

$$N_1=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial a'_1}{\partial x}+\frac{\partial b'_1}{\partial y}\right)z^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial a'_2}{\partial x}+\frac{\partial b'_2}{\partial y}\right)z.$$

Soit en outre

$$\varphi(x,y,z)=c_0z^2+c_1z+c_2,$$
$$\varphi_1(x,y,z)=c'_0z^2+c'_1z+c'_2,$$

où les c sont des polynomes homogènes en x, y de degré marqué par l'indice.

Ceci dit, la première des équations (3) donne

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f}{z^5}\right)=\frac{AB_1-A_1B}{z^6}.$$

Nous allons tirer de cette dernière équation la valeur de f à un terme près de la forme Cz^5 où C sera une constante, car elle ne peut être une fonction de x et y, puisque f doit être un poly-

nome du cinquième degré en x, y, z; f étant ainsi déterminé, on devra avoir, d'après les deux autres équations (3),

$$f'_x = \frac{BC_1 - CB_1}{z}, \qquad f'_y = \frac{CA_1 - AC_1}{z}.$$

Introduisons maintenant une nouvelle hypothèse; *nous supposons que la surface possède une ligne double ne se réduisant pas à une seule droite*. La ligne double sera alors nécessairement une conique située dans le plan $z = 0$, car la surface $Q = 0$ contient la ligne double; on ne peut avoir comme ligne double de la surface deux droites ne se rencontrant pas, car alors la surface serait unicursale.

Les surfaces $A = 0$, $A_1 = 0$, $B = 0$, $B_1 = 0$ doivent passer par cette conique, et nous pouvons mettre ses équations sous la forme

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 + 1 = 0,$$

si elle est indécomposable; on ferait un calcul analogue à celui que nous allons faire pour le cas où elle serait décomposable.

Les polynomes

$$c_2 x + a_2, \quad c_2 y + b_2, \quad c'_2 x + a'_2, \quad c'_2 y + b'_2$$

doivent être divisibles par $x^2 + y^2 + 1$; soit donc

$$(4) \qquad \begin{cases} c_2 x + a_2 = (\alpha x + \beta)(x^2 + y^2 + 1), \\ c_2 y + b_2 = (\alpha y + \gamma)(x^2 + y^2 + 1), \\ c'_2 x + a'_2 = (\alpha' x + \beta')(x^2 + y^2 + 1), \\ c'_2 y + b'_2 = (\alpha' y + \gamma')(x^2 + y^2 + 1), \end{cases}$$

les α, β, γ étant des constantes; on peut tirer de ces identités a_2, b_2, c_2 et a'_2, b'_2, c'_2.

Dans $f(x, y, z)$ le terme indépendant de z sera

$$-\frac{1}{5}[(c_2 x + a_2)(c'_2 y + b'_2) - (c_2 y + b_2)(c'_2 x + a'_2)]$$

ou

$$(5) \qquad -\frac{1}{5}(x^2 + y^2 + 1)^2 [x(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma) + y(\beta\alpha' - \beta'\alpha) + \beta\gamma' - \beta'\gamma].$$

Cherchons d'autre part le terme indépendant de z dans

$$\frac{BC_1 - CB_1}{z},$$

ce sera

$$(c_2 y + b_2)\left[c'_2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial a'_2}{\partial x} + \frac{\partial b'_2}{\partial y}\right)\right] - (c'_2 y + b'_2)\left[c_2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x} + \frac{\partial b_2}{\partial y}\right)\right],$$

ou, en remplaçant les a_2, b_2, c_2 par leurs valeurs tirées des identités (4),

$$(x^2+y^2+1)\Big[x^2(\alpha'\gamma - \alpha\gamma') + \frac{1}{2}y^2(\alpha'\gamma - \alpha\gamma')$$
$$+ \frac{1}{2}(\alpha\beta' - \alpha'\beta)xy + \frac{1}{2}(\beta'\gamma - \beta\gamma')x + \frac{1}{2}(\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)\Big].$$

Cette expression doit être la dérivée par rapport à x de l'expression (5); or, cela n'est possible que si

$$\alpha'\gamma - \alpha\gamma' = \alpha\beta' - \alpha'\beta = \beta'\gamma - \gamma'\beta = 0.$$

Dans ces conditions, l'expression (5) est nulle, et il en résulte que $f(x, y, z)$ serait divisible par z et la surface serait, par suite, décomposable. Donc *une surface de cinquième degré avec une conique double ne peut avoir deux intégrales de première espèce, qui ne soient pas fonctions l'une de l'autre.* Nous étendrons plus tard cette proposition à toutes les surfaces du cinquième degré de *genre un,* quand nous aurons défini le *genre* d'une surface algébrique.

CHAPITRE VI.

DES INTÉGRALES DE DIFFÉRENTIELLES TOTALES DE SECONDE ESPÈCE ET DE TROISIÈME ESPÈCE [1].

I. — Généralités. Théorème fondamental sur le nombre des intégrales de seconde espèce.

1. Après l'étude des intégrales de première espèce, nous abordons l'étude des intégrales de seconde espèce. Nous dirons qu'une intégrale

$$(1) \qquad \int P\,dx + Q\,dy \qquad [f(x, y, z) = 0]$$

est *une intégrale de seconde espèce,* quand les conditions suivantes seront vérifiées. Prenons, comme nous l'avons fait pour les intégrales de première espèce, un point arbitraire (x_0, y_0, z_0), et envisageons toutes les courbes passant par (x_0, y_0, z_0) sur la surface, et susceptibles d'être représentées, dans le voisinage du point, par les équations

$$(2) \qquad x = x_0 + \lambda(t), \qquad y = y_0 + \mu(t), \qquad z = z_0 + \nu(t),$$

λ, μ, ν étant holomorphes dans le voisinage de $t = 0$ et s'annulant pour $t = 0$. On substitue ces valeurs dans l'expression (1), et l'on a une intégrale

$$(3) \qquad \int F(t)\,dt,$$

$F(t)$ étant méromorphe autour de $t = 0$; le point $t = 0$ ne devra

---

(1) E. Picard, *Sur les intégrales de différentielles totales de seconde espèce* (*Journal de Mathématiques,* 1886); *Memoire sur les fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (*ibid.*, 1889); *Sur la théorie des surfaces algébriques au point de vue de la Géométrie de situation et sur les intégrales de différentielles totales* (*Comptes rendus,* 15 mars 1897).

pas être un point singulier logarithmique pour cette dernière intégrale. Si cette condition est remplie pour tous les points de la surface, et pour toutes les courbes de la nature indiquée sur la surface, nous dirons que *l'intégrale est une intégrale de seconde espèce.*

Si l'intégrale (1) *est de seconde espèce, l'intégrale prise le long de tout cycle susceptible de se réduire à un cycle nul, est égale à zéro;* on suppose, bien entendu, que l'élément différentiel reste fini pour tout point du cycle considéré. La proposition est évidente pour un cycle très petit dans le voisinage d'un point simple de la surface f, car on pourra ramener le cycle à être plan tout en restant infiniment petit, et l'on aura alors un cycle infiniment petit sur une section plane de la surface; comme l'intégrale (1) sera nécessairement alors une intégrale abélienne de seconde espèce pour cette section, l'intégrale cherchée sera certainement nulle. Pour démontrer le théorème dans toute sa généralité, il suffit de se reporter à la surface S sans singularités, à laquelle nous avons fait correspondre la surface donnée f dans un espace à cinq dimensions. Pour tout cycle infiniment petit sur la surface S, l'intégrale sera nulle; on peut, en effet, faire correspondre à un point A de la surface S un point simple d'une certaine surface Σ dans un espace à trois dimensions, et nous sommes ramenés au cas qui vient d'être examiné. Si nous considérons alors sur S un cycle arbitraire susceptible de se ramener à zéro par une déformation continue, il pourra arriver, pendant cette déformation, que le cycle rencontre des points de S pour lesquels l'intégrale devienne infinie, mais l'intégrale ne change pas de valeur quand le cycle a traversé un tel point, car la différence de ces deux valeurs est égale à la valeur de l'intégrale le long d'un cycle infiniment petit, et, par conséquent, à zéro, d'après ce qui précède; le théorème est donc démontré.

La propriété qui vient d'être établie est caractéristique des intégrales de seconde espèce, et l'on peut la prendre comme définition de ces intégrales. Montrons que ces deux définitions sont équivalentes. Nous supposons donc l'intégrale telle que sa valeur soit nulle pour tout cycle susceptible de se ramener à un cycle nul. Si nous prenons d'abord un point simple de la surface (x_0, y_0, z_0), on voit immédiatement que, x, y, z étant exprimés



par les formules (2), l'intégrale (3) n'aura pas le point $t = 0$ comme point singulier logarithmique, car, dans le cas contraire, à une courbe infiniment petite autour du point $t = 0$, dans le plan de la variable t, correspondrait sur la surface un cycle infiniment petit autour du point simple x_0, y_0, z_0, cycle susceptible, par conséquent, de se réduire à zéro, et pour lequel l'intégrale ne serait pas nulle. La démonstration sera la même si (x_0, y_0, z_0) est un point multiple quelconque de la surface f; il suffit de recourir à la surface S. Les coordonnées des points de cette surface s'expriment rationnellement en fonction des coordonnées x, y, z d'un point de f; en substituant dans ces expressions les valeurs (2), les coordonnées d'un point de S deviennent des fonctions de t ayant une limite déterminée quand t tend vers zéro, et l'on a ainsi sur S un point limite A. Pour l'intégrale (3), le point $t = 0$ ne peut être un point singulier logarithmique, car autrement, un cycle infiniment petit correspondrait sur la surface à une petite courbe décrite autour de $t = 0$, et à ce cycle infiniment petit correspondrait une valeur de l'intégrale différente de zéro. Mais ce cycle infiniment petit peut se réduire à zéro, puisqu'il lui correspond, sur la surface S, une courbe infiniment voisine du point A; il y aurait donc contradiction.

2. En se bornant aux singularités ordinaires de la surface, c'est-à-dire à des courbes doubles avec points triples, on peut définir plus rapidement les intégrales de seconde espèce. Dans une intégrale de différentielle totale, il peut y avoir des courbes le long desquelles l'intégrale devienne infinie. Soit C une de ces courbes et supposons qu'elle soit une courbe simple de la surface; je prends alors un cycle infiniment petit *entourant* cette courbe en un point arbitraire (on peut, par exemple, donner à y une valeur fixe et considérer dans le plan de la variable x un contour infiniment petit autour d'un point de la courbe C, répondant à la valeur prise pour y); si l'intégrale le long de ce cycle est nulle, nous dirons que la courbe C est une courbe polaire. *Une intégrale de seconde espèce ne possède que des courbes polaires.*

Il a été supposé que la courbe C était une courbe simple de la surface. Le cas où elle serait une courbe double de la surface ne donne lieu à aucune difficulté; on peut de a même manière con-

sidérer un cycle infiniment petit *entourant* la courbe double dans le voisinage d'un de ses points. Un tel cycle doit donner une intégrale nulle.

On peut encore dire que l'intégrale de différentielle totale considérée est une intégrale de seconde espèce, au sens habituel de la théorie des courbes algébriques pour une section plane quelconque de la surface.

Si l'intégrale le long d'un contour infiniment petit, réductible à un cycle nul analogue à celui dont nous venons de parler, n'est pas nulle, cette courbe C sera dite une courbe *logarithmique*, et *l'intégrale sera de troisième espèce.*

3. La première proposition, concernant les intégrales de différentielles totales de seconde espèce, consiste en ce qu'*en général ces intégrales se réduisent à des fonctions rationnelles de x, y et z.*

Soient, en effet, une surface pour laquelle $p_1 = 1$, et une intégrale de seconde espèce

$$\int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P\,dx + Q\,dy.$$

Cette intégrale n'aura qu'une seule valeur en un point arbitraire (x, y, z) de la surface. En effet, tout cycle qui se ramène à un cycle nul donne, par hypothèse, la valeur zéro pour l'intégrale, et, comme il n'y a pas de cycle linéaire effectif, toutes les périodes de l'intégrale sont nulles, et elle se réduit par suite à une fonction rationnelle de x, y et z.

Nous devons alors nous poser la question suivante : *Comment pourra-t-on reconnaître si une surface algébrique possède des intégrales de seconde espèce qui ne soient pas des fonctions rationnelles de x, y et z, et comment pourra-t-on obtenir ces intégrales?*

Nous dirons que des intégrales de seconde espèce sont *distinctes* quand aucune combinaison linéaire de ces intégrales ne se réduit à une fonction rationnelle de x, y et z.

4. Avant de traiter ce problème, revenons aux considérations

développées dans le Chapitre IV, relativement au nombre p_1. Nous avons trouvé une intégrale

$$\int R\,dx + S\,dy.$$

Il résulte immédiatement des propriétés établies que cette intégrale ne pourra avoir de courbes logarithmiques. Il est tout d'abord impossible que l'on ait une courbe logarithmique C qui ne soit pas de la forme : soit $x = \text{const.}$, soit $y = \text{const.}$

En effet, l'intégrale

$$\int R(x, \bar{y}, z)\,dx,$$

relative à la courbe $f(x, \bar{y}, z) = 0$ aurait alors un ou plusieurs points singuliers logarithmiques aux points de rencontre de la courbe C avec le plan $y = \bar{y}$.

D'autre part, il n'y a pas de courbe logarithmique de la nature indiquée plus haut, soit par exemple

$$x = \alpha,$$

car l'intégrale

$$\int R(x, \bar{y}, z)\,dx,$$

relative à la courbe $f(x, \bar{y}, z) = 0$, aurait, pour $\bar{y}$ arbitraire, les points correspondant à $x = \alpha$ comme points singuliers logarithmiques, ce qui est contraire au fait que, pour y arbitraire, l'intégrale précédente est de seconde espèce. Enfin, pour ce qui concerne les points à l'infini, la section de la surface par le plan de l'infini ne peut non plus être une courbe logarithmique, car la période logarithmique correspondante est égale à une période logarithmique pour le point à l'infini dans une section $y = \text{const.}$, c'est-à-dire à zéro.

Il résulte de là que l'intégrale

$$\int R\,dx + S\,dy \tag{4}$$

est une intégrale de seconde espèce, et, de là, nous allons conclure le théorème suivant déjà énoncé par avance à la fin du Chapitre IV.

Une surface, dont la connexion linéaire est p_1, possède

$$p_1 - 1$$

intégrales distinctes *de différentielles totales de seconde espèce.*

La démonstration est immédiate. Nous savons (Chapitre IV) qu'on peut prendre arbitrairement les $r = p_1 - 1$ périodes de l'intégrale (4). Considérons une intégrale quelconque J de seconde espèce. Elle aura $p_1 - 1$ périodes (dont quelques-unes pourront être nulles); formons alors l'intégrale (4) ayant ces périodes et désignons-la par I. La différence

$$I - J$$

sera une intégrale de seconde espèce n'ayant pas de période; ce sera par suite une fonction rationnelle de x, y et z. Le théorème est donc établi.

II. — Recherche des intégrales de seconde espèce.

5. Nous arrivons maintenant à la recherche des intégrales de seconde espèce. Nous pouvons, en un certain sens, regarder ce problème comme déjà résolu; une solution, du moins, se déduit immédiatement des considérations développées dans la 3e Section du Chapitre IV et dans la première Section du présent Chapitre. Si, en effet, on a formé l'équation différentielle désignée par E, et si, ayant obtenu son groupe, on a formé le système des équations (π), on pourra obtenir les r intégrales distinctes de seconde espèce. Mais ce procédé, très bon pour établir les théorèmes généraux, est plutôt théorique, et des considérations différentes vont nous conduire à des calculs pratiques d'une nature tout élémentaire. Commençons par considérer une surface dont l'équation est de la forme

$$z^2 = f(x, y),$$

$f(x, y)$ étant un polynome, et soit l'intégrale

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{M\sqrt{f(x, y)}},$$

forme à laquelle peut se ramener toute intégrale de seconde espèce après suppression d'une fonction rationnelle de x, y et z. Les P, Q, M sont des polynomes en x et y, et l'on a la condition d'intégrabilité

$$M\left(P\frac{\partial f}{\partial y} - Q\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2f(x,y)\left[M\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + Q\frac{\partial M}{\partial x} - P\frac{\partial M}{\partial y}\right]:$$

en général $M(x, y)$ sera le produit d'un certain nombre de facteurs

$$[A(x,y)]^\alpha [B(x,y)]^\beta \ldots [L(x,y)]^\lambda,$$

les polynomes A, B, ..., L étant irréductibles, et aucun d'eux, comme on peut le supposer en faisant préalablement sur x et y une substitution linéaire, n'est divisible par y.

Soit d'abord le cas le plus simple où

$$M = A^\alpha(x, y):$$

la condition d'intégrabilité s'écrira

$$A(x,y)\left(P\frac{\partial f}{\partial y} - Q\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2f(x,y)\left[A\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + \alpha Q\frac{\partial A}{\partial x} - \alpha P\frac{\partial A}{\partial y}\right].$$

Supposons que $A(x, y)$ soit premier avec $f(x, y)$; on voit alors que

$$Q\frac{\partial A}{\partial x} - P\frac{\partial A}{\partial y}$$

est divisible par $A(x, y)$.

Ceci posé, considérons l'intégrale

$$\int \frac{P(x,y)\,dx}{A^\alpha\sqrt{f(x,y)}},$$

en regardant y comme un paramètre. On peut, comme il est bien connu, retrancher de

$$\frac{P(x,y)}{A^\alpha\sqrt{f(x,y)}}$$

une expression de la forme

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\lambda\sqrt{f(x,y)}}{A^{\alpha-1}}\right],$$

λ étant un polynome en x, telle que la différence ne contienne

plus A au dénominateur qu'à la puissance $\alpha - 1$. Le polynome λ de x aura ses coefficients qui seront des fractions rationnelles de y; nous pourrons l'écrire sous la forme

$$\frac{\lambda(x, y)}{\varphi(y)},$$

$\lambda(x, y)$ étant un polynome en x et y. On aura alors nécessairement

$$\mathrm{P} + (\alpha - 1)\frac{\lambda(x, y)}{\varphi(y)}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}f(x, y) = \frac{\mu(x, y)}{\varphi(y)}\mathrm{A}(x, y),$$

$\mu(x, y)$ étant un polynome, et, comme $\mathrm{Q}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x} - \mathrm{P}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}$ est divisible par A, il en résultera une identité de la forme

$$\mathrm{Q} + (\alpha - 1)\frac{\lambda(x, y)}{\varphi(y)}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y}f(x, y) = \frac{\mu_1(x, y)}{\varphi(y)}\mathrm{A}(x, y)$$

Retranchons maintenant de

$$\frac{\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy}{\mathrm{A}^\alpha\sqrt{f(x, y)}}$$

la différentielle totale

$$d\left[\frac{\lambda(x, y)\sqrt{f(x, y)}}{\varphi(y)\mathrm{A}^{\alpha-1}}\right]:$$

la différence sera de la forme

$$\frac{\mathrm{P}_1\,dx + \mathrm{Q}_1\,dy}{\psi(y)\mathrm{A}^{\alpha-1}\sqrt{f(x, y)}}.$$

Nous avons ainsi diminué d'une unité le degré de A, et introduit seulement au dénominateur le polynome $\psi(y)$. Nous pourrons évidemment continuer ainsi jusqu'à ce que nous arrivions à une différentielle totale de la forme

$$\frac{\mathrm{P}_{\alpha-1}\,dx + \mathrm{Q}_{\alpha-1}\,dy}{\mathrm{A}\chi(y)\sqrt{f(x, y)}}.$$

Puisque l'intégrale est de seconde espèce, il est nécessaire que $\mathrm{P}_{\alpha-1}$ et $\mathrm{Q}_{\alpha-1}$ soient divisibles par $\mathrm{A}(x, y)$, car cette différentielle nous conduirait, dans le cas contraire, à une intégrale de troisième

espèce. Nous avons donc une intégrale de la forme

$$(5) \qquad \int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\chi(y)\sqrt{f(x,y)}},$$

après avoir extrait de l'intégrale initiale une partie rationnelle en $x, y, \sqrt{f(x,y)}$; P et Q sont des polynomes en x et y, et $\chi(y)$ est un polynome dépendant seulement de y.

La conclusion à laquelle nous venons d'arriver est entièrement générale; elle subsiste, comme on le voit aisément, si M a plusieurs facteurs irréductibles, et aussi si $f(x,y)$ n'est pas premier avec les facteurs A; dans ce cas, la réduction se fait encore plus facilement, comme on le sait, d'après la théorie élémentaire des intégrales hyperelliptiques.

6. Il suffit donc de partir d'une intégrale de différentielle totale de la forme (5), puisque toute intégrale de seconde espèce s'y ramène, comme on vient de le voir, après soustraction d'une fonction rationnelle de $x, y, \sqrt{f(x,y)}$. En regardant y comme un paramètre, arrêtons-nous d'abord sur l'intégrale

$$\int \frac{P(x,y)\,dx}{\chi(y)\sqrt{f(x,y)}}.$$

On sait qu'en retranchant de cette intégrale la dérivée d'une expression de la forme

$$P_1(x)\sqrt{f(x,y)},$$

on peut ramener le degré de P à être $m-2$, si m est le degré de f. Les coefficients de $P_1(x)$ dépendront nécessairement de y, et ce seront évidemment des fractions rationnelles de y, dont le dénominateur sera $\chi(y)$. Écrivons donc cette expression sous la forme

$$\frac{P_1(x,y)\sqrt{f(x,y)}}{\chi(y)},$$

où $P_1(x,y)$ est un polynome. Considérons alors la différence

$$\frac{P\,dx + Q\,dy}{\chi(y)\sqrt{f(x,y)}} - d\left[\frac{P_1(x,y)\sqrt{f(x,y)}}{\chi(y)}\right].$$

Elle aura la forme, où nous gardons les mêmes notations,

$$\frac{P\,dx + Q\,dy}{\chi(y)\sqrt{f(x,y)}},$$

avec la circonstance capitale que $P(x, y)$ *est, au plus, du degré* $m-2$ *en* x.

La condition d'intégrabilité

$$\chi(y)\left(P\frac{\partial f}{\partial y} - Q\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2f(x,y)\left[\chi(y)\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) - P\frac{\partial \chi}{\partial y}\right]$$

montre de suite que $Q(x, y)$ sera, par rapport à x, *de degré* $m-1$ *au plus*.

Nous avons donc une intégrale où les degrés par rapport à x sont limités. Écrivons cette intégrale sous la forme

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\sqrt{f(x,y)}},$$

où

$$P = a_0 x^{m-2} + a_1 x^{m-3} + \ldots + a_{m-2},$$
$$Q = b_0 x^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1},$$

les a et b étant des fractions rationnelles de y. *Telle est la forme à laquelle peut se ramener toute intégrale de seconde espèce,* après soustraction d'une fonction rationnelle convenable de x, y, $\sqrt{f(x,y)}$.

7. Prenons maintenant la condition d'intégrabilité

$$P\frac{\partial f}{\partial y} - Q\frac{\partial f}{\partial x} = 2f(x,y)\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right), \tag{6}$$

et soit

$$f(x,y) = x^m + \varphi_1(y)x^{m-1} + \ldots + \varphi_m(y).$$

Les deux membres de l'identité (6) vont être des polynomes en x de degré $2m-2$. Nous aurons à égaler $2m-1$ coefficients à zéro, et dans ces $2m-1$ équations figureront les $2m-1$ fonctions de y

$$a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_{m-2}, \quad b_0, \quad b_1, \quad \ldots, \quad b_{m-1}.$$

Nous formons donc un système d'équations différentielles linéaires auxquelles doivent satisfaire les fonctions a et b. Si la

surface $z^2 = f(x, y)$ admet d'autres intégrales de seconde espèce que des fonctions rationnelles de x, y et z, *il sera nécessaire que ce système admette pour les a et b des solutions rationnelles.*

8. Pour faire la discussion, supposons m impair et égal à $2p+1$. En égalant d'abord à zéro dans l'identité (6) les coefficients de

$$x^{2m-2}, \quad x^{2m-3}, \quad \ldots, \quad x^{m-1},$$

nous obtenons m identités qui nous permettent d'exprimer de proche en proche

$$b_0, \quad b_1, \quad \ldots, \quad b_{m-1}$$

à l'aide des a et de leurs dérivées premières. Portant ces valeurs dans les $(m-1)$ autres identités que nous avons encore à écrire, et qui sont fournies par la considération des coefficients de x^{m-2}, x^{m-3}, ..., x^0, nous obtiendrons $m-1$ équations linéaires et homogènes entre

$$a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_{m-2}, \quad \frac{da_0}{dy}, \quad \ldots, \quad \frac{da_{m-2}}{dy},$$

les coefficients dans ces équations étant évidemment des polynomes en y. Nous trouvons donc un système de $m-1$ équations linéaires du premier ordre auxquelles doivent satisfaire les $m-1$ fonctions rationnelles a_0, a_1, ..., a_{m-2}. *Nous sommes donc ramenés tout d'abord à reconnaître si ce système admet des intégrales rationnelles;* c'est là un problème que l'on sait résoudre.

9. Les considérations précédentes ne nous donnent pas en réalité des résultats distincts de ceux auxquels nous avons été conduits au Chapitre IV (Section III). En nous plaçant au même point de vue qu'à cet endroit, nous devons envisager l'intégrale

$$\int \frac{(a_0 x^{m-2} + a_1 x^{m-3} + \ldots + a_{m-2})\, dx}{\sqrt{f(x, y)}},$$

relative à la courbe $z^2 = f(x, \bar{y})$, où y est un paramètre arbitraire, les a étant des fonctions pour le moment arbitraire de y. Cette intégrale est de seconde espèce pour y arbitraire, et elle a $2p$ pé-

riodes qui dépendent de y. Cherchons à déterminer les $2p$ fonctions

$$a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_{m-2},$$

de telle manière que ces périodes soient indépendantes de y et soient égales à des constantes

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_{2p},$$

pour les cycles $C_1, C_2, \ldots, C_{2p}$.

En désignant par

$$\omega_1^i, \quad \omega_2^i, \quad \ldots, \quad \omega_{2p}^i,$$

les périodes de

$$\int \frac{x^{m-i-1}\,dx}{\sqrt{f(x,y)}},$$

correspondant à $2p$ cycles C, on aura les $2p$ équations

$$(I) \qquad a_0\omega_h^1 + a_1\omega_h^2 + \ldots + a_{m-2}\omega_h^{2p} = P_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, 2p).$$

De ces équations, on peut tirer les a, et l'on aura

$$a_i = P_1 Q_{1,i} + P_2 Q_{2,i} + \ldots + P_{2p} Q_{2p,i},$$

les Q étant des fonctions de y. Il est clair que les a ainsi obtenus satisfont à un système d'équations linéaires du premier ordre, et nous allons voir facilement que ce système n'est autre que celui qui a été formé il y a un instant.

Supposons, en effet, que les a soient des fonctions de y (rationnelles ou non), telles que les périodes de l'intégrale

$$\int \frac{a_0 x^{m-2} + a_1 x^{m-3} + \ldots + a_{m-2}}{\sqrt{f(x,y)}}\,dx$$

ne dépendent pas de y; montrons qu'on peut former une intégrale de différentielle totale

$$\int R\,dx + S\,dy,$$

où

$$R = \frac{a_0 x^{m-2} + a_1 x^{m-3} + \ldots + a_{m-2}}{\sqrt{f(x,y)}},$$

S étant rationnelle en x et $\sqrt{f(x,y)}$, tandis que y figure d'une manière quelconque. Il suffit de reprendre, dans ce cas particu-

lier, l'analyse générale du n° 24, Chap. IV. On doit avoir

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Nous prenons alors

$$S = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0,\sqrt{f_0}}^{x,\sqrt{f}} R\,dx + \int_{x_0,-\sqrt{f_0}}^{x,\sqrt{f}} R\,dx\right),$$

en posant $f_0 = f(x_0, y)$, et x_0 désignant un nombre fixe arbitraire. On aura pour S ainsi formé une fonction rationnelle de x et $\sqrt{f(x,y)}$. On voit de suite que cette fonction rationnelle ne peut devenir infinie que pour les valeurs de x et y annulant $f(x,y)$, et, en outre, y étant arbitraire, elle est pour x très grand, d'ordre $\frac{m}{2} - 1$; par conséquent S est nécessairement de la forme

$$S = \frac{b_0 x^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}}{\sqrt{f(x,y)}},$$

les b ne dépendant que de y.

Il résulte de là que les relations différentielles trouvées au n° 8 donnent, pour les coefficients a, les mêmes valeurs que les équations (I). Il y a donc, au fond, identité entre la recherche que nous venons d'effectuer et celle que nous avions faite précédemment, mais *nous avons ici le grand avantage d'avoir un problème beaucoup plus facile à traiter*. Des calculs immédiats et tout élémentaires nous permettent de former le système d'équations différentielles linéaires donnant les quantités a, et nous avons à chercher les intégrales rationnelles de ce système d'équations, problème facile à résoudre. On remarquera que, si les équations (I) donnent pour $a_0, \ldots, a_{m-2}$ des fonctions rationnelles de y, les constantes P satisfont nécessairement aux équations

$$(\pi) \qquad P_i = m_1^i P_1 + m_2^i P_2 + \ldots + m_{2p}^i P_{2p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p),$$

ces équations correspondant à la substitution qui transforme $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2p}$ quand y décrit un chemin fermé dans son plan. Ce système des équations (π) n'est d'ailleurs autre chose que celui qui a été considéré au n° 22 du Chapitre IV.

10. Nous devons maintenant nous demander, dans le cas où l'on pourra déterminer rationnellement les a et les b, si l'intégrale ainsi obtenue est de seconde espèce. Les valeurs de y, correspondant aux racines multiples de l'équation en x

$$f(x, \bar{y}) = 0,$$

sont les quantités désignées au Chapitre IV par b; et désignons encore par a les racines multiples. Nous avons à reprendre la discussion du n° 23 du Chapitre IV; mais nous sommes ici dans un cas plus compliqué, car les points $(a, 0)$ pourront être des points doubles d'un degré arbitraire de complication pour la courbe

$$z^2 = f(x, b).$$

Il faut d'abord montrer que l'intégrale

$$\int S(x, y, z)\, dy$$

est une intégrale de seconde espèce pour la courbe $z^2 = f(\bar{x}, y)$, quand x a une valeur arbitraire. On y parvient en suivant absolument la même voie qu'au numéro indiqué et il résultera de là que l'intégrale

$$\int R\, dx + S\, dy$$

n'a pas de courbe logarithmique passant par le point $(a, b, 0)$. Si ce point est un point simple de la surface, comme il l'était à l'endroit cité, il n'y a aucune difficulté, car tout cycle infiniment petit autour du point $(a, b, 0)$ se ramène alors à un cycle infiniment petit dans un plan quelconque très voisin de ce point et donne, par suite, une valeur nulle pour l'intégrale. Si le point $(a, b, 0)$ est un point double, c'est un point double isolé de la surface, et il serait peut-être possible qu'un cycle infiniment petit autour de ce point fût réductible à un cycle nul et donnât une valeur de l'intégrale différente de zéro.

Pour décider s'il en est ainsi, il faudra avoir recours à la réduction du point singulier isolé. On se rappelle qu'on peut faire correspondre à ce point une ou plusieurs courbes d'une surface sans singularités dans l'espace à cinq dimensions. Cette réduction

faite, on verra immédiatement si ces courbes sont des courbes logarithmiques pour l'intégrale, auquel cas correspondrait alors, dans le voisinage du point double considéré de la surface

$$z^2 = f(x, y),$$

un cycle infiniment petit, se réduisant à un cycle nul, et pour lequel l'intégrale aurait une valeur différente de zéro. En écrivant que cette valeur est nulle, on pourra avoir de nouvelles relations entre les P, qui viendront s'ajouter aux équations (π). Ces relations seront nécessairement aussi à coefficients entiers, puisque tout cycle pouvant se ramener à un cycle dans un plan $y =$ const., la période correspondante s'exprime à l'aide des P. On aura finalement, en opérant sur les différents points singuliers y compris ceux qui sont à l'infini, un ensemble de relations entre les P permettant de prendre un certain nombre d'entre eux arbitrairement, et l'on aura de cette manière le nombre des intégrales de seconde espèce linéairement indépendantes. Nous pouvons donc considérer que la recherche des intégrales distinctes de seconde espèce est complètement effectuée pour les surfaces dont l'équation est de la forme $z^2 = f(x, y)$.

11. Nous allons suivre une marche toute semblable pour obtenir le nombre des intégrales distinctes de seconde espèce d'une surface dont l'équation est de forme quelconque

$$f(x, y, z) = 0;$$

nous pouvons ici supposer que la surface n'a que des singularités ordinaires. Nous devons faire d'abord une digression relative aux intégrales de seconde espèce d'une courbe algébrique. Prenons donc la courbe de degré m

$$f(x, y) = 0.$$

que nous supposons n'avoir que des points doubles à tangentes distinctes, les axes occupant d'ailleurs une position arbitraire. On ramène immédiatement les intégrales abéliennes relatives à cette courbe aux deux types

$$\int \frac{P(x, y)\,dx}{f'_y} \quad \text{et} \quad \int \frac{Q(x, y)\,dx}{(x-a)^\alpha f'_y}.$$

On n'approfondit généralement pas davantage cette réduction. M. Picard a montré dans le Tome I de son *Traité d'Analyse*, p. 50, que, par une soustraction convenable, les intégrales du premier type se ramènent au cas où le polynome P est au plus de degré $2m - 4$; de même pour le second type, on peut le ramener de proche en proche au cas où l'entier α est égal à l'unité.

Allons maintenant plus loin *en supposant que l'intégrale est de seconde espèce,* et voyons ce que l'on peut dire des intégrales du type

$$\int \frac{Q(x, y)\, dx}{(x-a) f'_y}.$$

Différents cas sont à distinguer suivant que la droite $x = a$ rencontre la courbe en m points distincts, lui est tangente ou bien passe par un point double. Dans le premier cas, le polynome Q devra évidemment s'annuler pour les m points de rencontre de $x = a$ avec la courbe, sinon chacun de ces points donnerait un infini logarithmique; il en résulte que le quotient

$$\frac{Q(x, y)}{x - a},$$

peut se mettre sous la forme d'un polynome en x et y, et nous sommes ramenés au premier type.

Supposons ensuite que $x = a$ soit tangente à la courbe au point $y = b$. Il faudra, en appelant $b_1, \ldots, b_{m-2}$ les $m - 2$ autres points de rencontre de $x = a$ avec la courbe que $Q(x, y)$ s'annule pour ces $m - 2$ points; considérons l'expression

$$\frac{\lambda(x, y)}{x - a},$$

$\lambda(x, y)$ s'annulant pour $x = a$, $y = b_1, b_2, \ldots, b_{m-2}$ et supposons de plus que $\lambda(a, b) = 0$. Si nous représentons par

$$y - b = \mu(x - a)^{\frac{1}{2}} + \ldots$$

le développement de y dans le voisinage du point (a, b), nous aurons le terme

$$\frac{\mu \frac{\partial \lambda}{\partial b}}{(x - a)^{\frac{1}{2}}},$$

comme terme devenant infini dans le quotient $\frac{\lambda(x, y)}{x-a}$. Or dans l'intégrale

$$\int \frac{Q(x, y)\,dx}{(x-a)f'_y},$$

qui n'a pas par hypothèse le point (a, b) comme point singulier logarithmique, nous aurons comme seul terme devenant infini un terme en

$$\frac{1}{(x-a)^{\frac{1}{2}}}.$$

Nous pouvons choisir $\frac{\partial\lambda}{\partial b}$ de manière que les termes devenant infinis soient identiques dans l'intégrale et dans le quotient considéré; on peut évidemment choisir le polynome $\lambda(x, y)$ de manière à satisfaire à ces conditions. La différence

$$\int \frac{Q(x, y)\,dx}{(x-a)f'_y} - \frac{\lambda(x, y)}{x-a}$$

restera alors finie pour $x = a$, et elle sera, par suite, de la forme

$$\int \frac{P(x, y)\,dx}{f'_y},$$

$P(x, y)$ étant un polynome.

Il reste à examiner le cas où la droite $x = a$ passe par un point double (a, b). Désignons encore par $b_1, b_2, \ldots, b_{m-2}$ les ordonnées des autres points de rencontre de $x = a$ avec la courbe, et reprenons l'intégrale

$$\int \frac{Q(x, y)\,dx}{(x-a)f'_y},$$

où $Q(x, y)$ s'annule toujours pour $(a, b_1)\ldots(a, b_{m-2})$.

Nous allons cette fois retrancher une expression de la forme

$$\frac{\lambda(x, y)}{(x-a)^2}.$$

Choisissons d'abord λ de telle sorte que ce quotient reste fini pour $(a, b_1), \ldots, (a, b_{m-2})$; pour le point (a, b), nous aurons deux développements correspondant à l'une et l'autre branches et soit

$$\lambda(a, b) = 0.$$

Si les deux développements de y sont

$$y - b = \mu_1(x - a) + \ldots,$$
$$y - b = \mu_2(x - a) + \ldots,$$

les développements de $\frac{\lambda}{(x-a)^2}$ auront respectivement comme terme devenant infini

$$\frac{\frac{\partial\lambda}{\partial a} + \mu_1 \frac{\partial\lambda}{\partial b}}{x - a}, \qquad \frac{\frac{\partial\lambda}{\partial a} + \mu_2 \frac{\partial\lambda}{\partial b}}{x - a}.$$

On déterminera donc $\frac{\partial\lambda}{\partial a}$ et $\frac{\partial\lambda}{\partial b}$ de manière que ces termes soient égaux à ceux qui deviennent infinis dans l'intégrale. Le polynome $\lambda(x, y)$ ayant été choisi de façon à satisfaire aux diverses conditions qui précèdent, la différence

$$\int \frac{Q(x, y)\, dx}{(x - a) f'_y} - \frac{\lambda(x, y)}{(x - a)^2}$$

restera finie pour $x = a$, et elle se réduira à une intégrale de la forme

$$\int \frac{P(x, y)\, dx}{f'_y},$$

où P est un polynome.

Il résulte de là que *nous avons ramené toutes les intégrales de seconde espèce, par une soustraction convenable d'une fonction rationnelle de x et y, à la forme*

$$(h) \qquad \int \frac{P(x, y)\, dx}{f'_y},$$

où $P(x, y)$ *est un polynome en x et y de degré* $2m - 4$.

D'après la façon dont nous avons opéré, il pourrait sembler que dans cette réduction nous introduisons des irrationalités par rapport aux coefficients de l'équation $f(x, y) = 0$. En réalité, il n'en est rien, car, sans résolution d'équations de degré supérieur à un, nous pouvons ramener les intégrales de second type au type

$$\int \frac{Q(x, y)\, dx}{X^\alpha f'_y},$$

où $X(x)$ est un polynome en x n'ayant que des facteurs simples, et la réduction peut se faire aux intégrales du premier type sans avoir à résoudre l'équation $X = 0$.

Comptons les coefficients restant arbitraires dans l'intégrale (h). La courbe $P = 0$ doit passer par les d points doubles; dans $P(x, y)$ figurent alors

$$\frac{(2m-3)(2m-2)}{2} - d$$

coefficients, mais nous pouvons retrancher de l'intégrale (h) le polynome arbitraire $\lambda(x, y)$ de degré $m-2$, qui peut s'écrire

$$\int \frac{\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}}{f'_y}\,dx$$

et qui contient alors au numérateur $\frac{m(m-1)}{2} - 1$ paramètres arbitraires. Le numérateur de l'intégrale ne renfermera plus alors que

$$\frac{(2m-3)(2m-2)}{2} - d - \left[\frac{m(m-1)}{2} - 1\right]$$

paramètres, et l'on peut encore réduire ce nombre, car le numérateur ne changera pas si l'on en retranche le produit

$$\lambda_1(x, y)f(x, y),$$

où λ_1 est un polynome de degré $m-4$, ce qui diminue encore le nombre précédemment trouvé de

$$\frac{(m-3)(m-2)}{2}.$$

En définitive, le nombre des paramètres restants sera

$$\frac{(2m-3)(2m-2)}{2} - d - \frac{m(m-1)}{2} + 1 - \frac{(m-3)(m-2)}{2} = m^2 - 2m + 1 - d.$$

Si, d'autre part, nous voulons que l'intégrale soit de seconde espèce, nous aurons à écrire que le point ∞ n'est pas un point critique logarithmique, ce qui donne $m-1$ conditions. Il reste donc, en résumé, un nombre de coefficients arbitraires égal à

$$m^2 - 2m + 1 - d - (m-1) = (m-1)(m-2) - d = 2p + d$$

En prenant arbitrairement $2p$ intégrales de la forme indiquée, on est assuré d'avoir un système de $2p$ intégrales de seconde espèce linéairement indépendantes.

12. Après cette digression, revenons aux intégrales de différentielles totales de seconde espèce relatives à une surface $f(x, y, z) = 0$. Il résulte du paragraphe précédent que nous pouvons, pour la courbe entre x et z

$$f(x, \bar{y}, z) = 0,$$

trouver $2p$ intégrales distinctes de seconde espèce

$$\int \frac{Q_1(x, y, z)\,dx}{f'_z}, \quad \ldots, \quad \int \frac{Q_{2p}(x, y, z)\,dx}{f'_z},$$

où les Q sont des polynomes en x, y et z. Reportons-nous alors au n° 23 du Chapitre IV.

Nous avons cherché à déterminer les fonctions rationnelles $a_1, \ldots, a_{2p}$ de y, de manière que les périodes de l'intégrale

$$\int \frac{a_1 Q_1 + \ldots + a_{2p} Q_{2p}}{f'_z}\,dx$$

ne dépendent pas de y. En désignant par R le coefficient de dx sous le signe d'intégration, nous avons vu que si la détermination indiquée des a est possible, il y aura pour la surface une intégrale correspondante

$$\int R\,dx + S\,dy$$

de seconde espèce dans laquelle on peut prendre, pour S, une expression de la forme

$$S(x, y, z) = \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial y}\left[\sum_{i=1}^{i=m} \int_{x_0, z_i}^{x, z} R(x, y, z)\,dx\right].$$

Or on peut trouver la forme de S considérée comme fonction de x et z. Une telle expression ne peut devenir infinie que pour les points (z, x) satisfaisant à la relation $f'_z = 0$. D'autre part R est, pour x très grand, infini d'ordre $m - 3$; par suite S sera, dans ces conditions, infini d'ordre $m - 2$. Donc S est nécessai-

rement de la forme

$$S = \frac{U(x, \bar{y}, z)}{f'_z},$$

U étant un polynome en x et z de degré $2m - 3$. On peut d'ailleurs donner à un polynome en x et z de degré $2m - 3$ différentes formes quand x et z vérifient une relation algébrique entre x et z, relation qui est ici $f(x, \bar{y}, z) = 0$. On peut évidemment supposer que z entre seulement au degré $m - 1$, et prendre alors pour U une expression telle que

$$U = \frac{\varphi_0 z^{m-1} + \varphi_1 z^{m-2} + \ldots + \varphi_{m-1}}{f'_z},$$

φ_i étant un polynome en x de degré au plus égal à $m + i - 2$, les coefficients de ces polynomes étant des fonctions de y que nous désignerons par b. Nous sommes assurés, en reprenant les raisonnements du n° 23, Chap. IV, que si les a sont des fonctions de y (rationnelles ou non) satisfaisant aux équations

$$(\pi) \qquad a_1 \omega_k^1 + a_2 \omega_k^2 + \ldots + a_{2p} \omega_k^{2p} = P_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2p),$$

les P étant des constantes arbitraires, on pourra adjoindre à R une expression S dépendant de x, y, z et rationnelle en x et z, et telle que

$$R\,dx + S\,dy$$

soit une différentielle totale exacte. Or prenons pour S une expression de la forme $\frac{U}{f'_z}$, les coefficients b des puissances de x dans les polynomes φ étant des fonctions indéterminées de y, et écrivons la condition d'intégrabilité pour la différentielle précédente. Nous obtiendrons ainsi un système d'équations différentielles du premier ordre entre les fonctions a et les fonctions b de y. Sans qu'il soit nécessaire de faire aucune discussion, nous sommes assurés que l'on pourra, entre les équations de ce système, éliminer les fonctions b, de manière à avoir un système de $2p$ équations linéaires du premier ordre à coefficients rationnels en y; nous savons, en effet, que les a sont déterminées par les équations (π), où figurent seulement $2p$ constantes arbitraires et cela d'une manière linéaire. Nous sommes donc certains de pou-

voir, par des calculs élémentaires, former un système d'équations linéaires L auquel satisfont les coefficients a. Il ne reste plus alors qu'à reconnaître si ce système d'équations admet des intégrales rationnelles et, s'il en admet plusieurs, combien il en admet de linéairement indépendantes.

Nous n'avons ici aucune discussion à faire pour les points singuliers, comme nous avons pu avoir à le faire au n° 10, car la surface n'a ici que des singularités ordinaires. D'après les explications données au n° 4 de ce Chapitre, *le nombre des solutions rationnelles linéairement indépendantes du système* L *sera égal à* $p_1 - 1$, et l'on a ainsi ramené la recherche du nombre p_1 à la question de reconnaître *si un système facile à former d'équations linéaires ordinaires à coefficients rationnels admet des intégrales rationnelles*. Nous pouvons donc regarder comme résolue la question qui a fait l'objet de cette Section : trouver le nombre des intégrales distinctes de seconde espèce d'une surface donnée.

III. — Des intégrales de troisième espèce.

13. Une intégrale de différentielle totale, pour une surface $f(x, y, z) = 0$, n'ayant que des singularités ordinaires

$$\int P\,dx + Q\,dy,$$

où P et Q sont rationnelles en x, y, z, sera, comme nous l'avons dit au n° 2, une intégrale de *troisième espèce*, quand elle aura une *courbe logarithmique*. Le long de certains contours infiniment petits, réductibles à un cycle nul, l'intégrale aura une valeur différente de zéro. Nous appellerons *période logarithmique* une période provenant d'une courbe logarithmique.

Si l'on a une surface, pour laquelle $p_1 = 1$, il est clair que *l'intégrale ne peut avoir d'autres périodes que des périodes logarithmiques,* car tout cycle se ramène par une déformation continue aux cycles infiniment petits qui ne peuvent donner que des périodes logarithmiques. Dans le cas où l'on a une surface correspondant à $p_1 > 1$, on peut obtenir une intégrale de troisième

espèce ayant, en dehors des périodes logarithmiques, $p_1 - 1$ périodes arbitrairement choisies; on peut, en effet, ajouter à une première intégrale de troisième espèce une intégrale de seconde espèce ayant $p_1 - 1$ périodes arbitraires.

Nous avons dit qu'à chaque courbe logarithmique correspond une période logarithmique. Supposons, comme il est permis, qu'une courbe logarithmique irréductible C ne soit pas située dans un continuum $y =$ const. Si l'on considère l'intégrale

$$\int P(x, y_0, z)\, dx,$$

relative à la courbe $f(x, \overline{y_0}, z) = 0$ entre x et z, cette intégrale aura un certain nombre de points singuliers logarithmiques correspondant aux points de rencontre de la courbe C avec le plan $y = y_0$. Pour un quelconque de ces points, la période logarithmique sera une constante *nécessairement indépendante de* y_0; donc, à chaque courbe logarithmique correspond une période logarithmique. Or on sait que, dans une intégrale abélienne, la somme des périodes logarithmiques correspondant aux divers points singuliers logarithmiques est nulle; par suite, si une intégrale différentielle totale a différentes courbes logarithmiques irréductibles

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_\lambda$$

de degrés respectifs

$$m_1, \quad m_2, \quad \ldots, \quad m_\lambda,$$

on aura nécessairement, en désignant par $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\lambda$ les valeurs des périodes logarithmiques correspondantes

$$m_1\Gamma_1 + m_2\Gamma_2 + \ldots + m_\lambda\Gamma_\lambda = 0.$$

14. Cherchons, autant qu'il est possible, à faire la réduction d'une intégrale de troisième espèce. Bornons-nous aux équations de la forme

$$z^2 = f(x, y).$$

Soit donc l'intégrale

$$\int \frac{P\, dx + Q\, dy}{M\sqrt{f(x, y)}},$$

où nous avons

$$M = A^\alpha B^\beta \ldots L^\lambda,$$

les facteurs A, B, ..., L étant irréductibles et premiers avec $f(x, y)$. En faisant les mêmes réductions que dans le cas des intégrales de seconde espèce, nous sommes ramenés à

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\chi(y)A.B\ldots L\sqrt{f(x, y)}}.$$

On peut établir une proposition intéressante relative aux polynomes A, B, ..., L qui figurent au dénominateur. Laissant y constant, considérons la période logarithmique de l'intégrale

$$\int \frac{P\,dx}{\chi(y)A.B\ldots L\sqrt{f(x, y)}},$$

relative à un point x racine de $A(x, y) = 0$; cette période sera

$$\frac{P(x, y)}{\chi\frac{\partial A}{\partial x}B\ldots L\sqrt{f(x, y)}}.$$

Cette expression devra être indépendante de y (x étant la fonction de y définie par $A = 0$), soit k sa valeur constante. On aura

$$P^2 - R^2 f(x, y) = 0$$

$\left(R \text{ étant le polynome } k\chi\frac{\partial A}{\partial x}B\ldots L\right)$ pour toutes les valeurs de x et y satisfaisant à l'équation $A(x, y) = 0$. Nous avons donc la conclusion suivante : *La surface* $A(x, y) = 0$ *coupe la surface proposée* $z^2 = f(x, y)$ *suivant les deux courbes distinctes*

$$(1) \qquad A(x, y) = 0, \qquad z = \frac{P}{R},$$

$$(2) \qquad A(x, y) = 0, \qquad z = -\frac{P}{R}.$$

Ainsi ces polynomes A, ..., L *ne peuvent être pris arbitrairement.*

15. La condition nécessaire que nous venons de trouver relativement aux polynomes A, B, ..., L vient compliquer singulièrement la discussion complète des intégrales de troisième espèce. Elle peut conduire à des résultats assez singuliers au premier

abord, comme celui que je vais indiquer. Prenons le cas simple de

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{A(x,y)\sqrt{f(x,y)}},$$

la condition d'intégrabilité sera

$$(3)\qquad A\left[P\frac{\partial f}{\partial y} - Q\frac{\partial f}{\partial x}\right] = 2f(x,y)\left[A\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + Q\frac{\partial A}{\partial x} - P\frac{\partial A}{\partial y}\right].$$

On peut se donner arbitrairement $A(x, y)$, et l'on peut certainement satisfaire à cette équation en prenant pour P et Q des polynomes en x et y : il suffira de prendre ces polynomes d'un degré suffisamment élevé. Mais si $A(x, y)$ ne remplit pas la condition nécessaire qui vient d'être indiquée, c'est-à-dire si la surface

$$A(x,y) = 0$$

ne coupe pas la surface

$$z^2 = f(x,y)$$

suivant deux courbes distinctes, *il ne sera pas possible que l'unique courbe d'intersection de ces deux surfaces donne une courbe logarithmique*. Il faudra par conséquent nécessairement *que* P *et* Q *soient divisibles par* A.

La question inverse se pose alors d'elle-même : Comment doit être choisi $A(x, y)$ pour que l'on puisse trouver des polynomes P et Q satisfaisant à l'équation (3), et qui ne soient pas divisibles par A.

Un cas simple est celui où l'on prendrait

$$A(x,y) = M^2 - N^2 f,$$

M et N étant deux polynomes, car il est évident alors que l'expression

$$\log\frac{M - N\sqrt{f}}{M + N\sqrt{f}}$$

répond à la question, c'est-à-dire peut se mettre sous la forme

$$\int \frac{P\,dx + dy}{A(x,y)\sqrt{f(x,y)}},$$

où P et Q sont des polynomes; les deux courbes logarithmiques

sont les courbes d'intersection de la surface $A = 0$ avec la surface $z^2 = f(x, y)$, courbes qui ont respectivement pour équations

$$A(x, y) = 0, \qquad z = \frac{M}{N}$$

et

$$A(x, y) = 0, \qquad z = -\frac{M}{N}.$$

16. La condition nécessaire trouvée pour $A(x, y)$ revient à dire que *ce polynome doit être un diviseur d'un polynome de la forme*

$$M^2 - N^2 f(x, y),$$

en désignant par M et N des polynomes premiers entre eux. Il est évident, en effet, que si A désigne un diviseur d'une expression de cette forme, la surface $A = 0$ coupe la surface $z^2 = f(x, y)$ suivant les deux courbes distinctes

$$A(x, y) = 0, \qquad z = \pm \frac{M}{N}.$$

Si le polynome A est de la forme

$$M^2 - N^2 f(x, y),$$

on pourra de l'intégrale

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{A.B\ldots L\sqrt{f(x, y)}}$$

retrancher un terme logarithmique, à savoir

$$K \log \frac{M - N\sqrt{f}}{M + N\sqrt{f}}$$

(où K est une constante convenable), de telle sorte que la différence n'ait plus pour courbes logarithmiques les deux courbes

$$A(x, y) = 0, \qquad z = \pm \frac{M}{N}.$$

Les seules courbes logarithmiques à distance finie pour lesquelles on ne puisse pas faire une soustraction de cette nature sont celles qui proviendraient d'un polynome $A(x, y)$ diviseur d'une expression de la forme $M^2 - N^2 f(x, y)$, où M et N sont

premiers entre eux, sans être lui-même de cette forme. Cette dernière circonstance algébrique peut effectivement se présenter; soit par exemple

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + 1.$$

Le polynome $xy\sqrt{2} - 1$ divise

$$(x^2 + y^2)^2 - (x^4 + y^4 + 1),$$

sans être de la forme $M^2 - N^2(x^4 + y^4 + 1)$.

Il serait intéressant de savoir si, A étant un polynome jouissant de la propriété indiquée [n'étant pas de la forme $M^2 - N^2 f(x, y)$], on pourra trouver une intégrale de différentielle totale

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{A\sqrt{f(x, y)}},$$

sans que P et Q fussent divisibles par A. C'est un point que nous n'éluciderons pas, et nous allons seulement faire une remarque importante sur la réduction des intégrales de troisième espèce, qui pourra être utile pour la solution de la question posée.

17. Considérons l'intégrale de différentielle totale

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{A(x, y)\sqrt{f(x, y)}}.$$

Nous supposons que dans le polynome $f(x, y)$, de degré m, l'ensemble des termes homogènes de plus haut degré $\varphi(x, y)$ n'ait que des facteurs simples; nous désignerons par α le degré de A.

Soit k le degré de P et Q; désignons par p et q l'ensemble des termes homogènes en x et y de degré k dans P et Q, et par $a(x, y)$ l'ensemble des termes homogènes de degré α dans A. Nous supposons que $a(x, y)$ est premier avec $\varphi(x, y)$, et que $a(x, y)$ n'a que des facteurs simples.

En prenant dans la condition d'intégrabilité l'ensemble des termes homogènes de plus haut degré, nous aurons évidemment

$$(4) \quad a\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial y} - q\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = 2\varphi(x, y)\left[a\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) + q\frac{\partial a}{\partial x} - p\frac{\partial a}{\partial y}\right],$$

$\varphi(x, y)$ désignant l'ensemble des termes homogènes de degré m

dans f : cette équation peut s'écrire

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial\varphi}{\partial x}\left\{-maq-2x\left[a\left(\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}\right)+q\frac{\partial a}{\partial x}-p\frac{\partial a}{\partial y}\right]\right\} \\ & +\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left\{\ \ map-2y\left[a\left(\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}\right)+q\frac{\partial a}{\partial x}-p\frac{\partial a}{\partial y}\right]\right\}.\end{aligned}\right.$$

Or, d'après (4), puisque φ est premier avec a,

$$q\frac{\partial a}{\partial x}-p\frac{\partial a}{\partial y}$$

est divisible par a; par suite, on peut diviser par a le second membre de l'identité (5) et la mettre sous la forme

$$(p-\mu y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}+(-q-\mu x)\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0,$$

et, comme $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ sont premiers entre eux, on a

$$p = \mu y+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$q=-\mu x+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

μ et λ étant deux polynomes homogènes en x et y, le premier de degré $k-1$, le second de degré $k-m+1$. En substituant ces valeurs de p et q dans l'équation (4), on obtient la relation

$$a\mu(m-2k-2+2\alpha)=2a\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+2\lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial y}\right),$$

qui permet d'exprimer μ en fonction de λ, si l'on a

$$m+2\alpha\neq 2k+2.$$

En portant dans l'intégrale

$$\int\frac{p\,dx+q\,dy}{a(x,y)\sqrt{\varphi(x,y)}},$$

la valeur de μ ainsi obtenue, on trouve que cette intégrale est égale à

$$\frac{2m+4\alpha}{2k+2-m-2\alpha}\,\frac{\lambda\sqrt{\varphi}}{a}.$$

Nous avons supposé que $a(x, y)$ n'a que des facteurs simples. Il faudra que λ soit divisible par $a(x, y)$, car les infinis de l'intégrale provenant de $a(x, y) = 0$ ne peuvent être que logarithmiques (a et φ étant premiers entre eux); il s'ensuit que p et q sont nécessairement divisibles par a, car autrement $\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial y}$ aurait un facteur commun avec a, ce qui est impossible quand a et φ sont premiers entre eux et que a n'a que des facteurs simples. Posons

$$\frac{\lambda}{a} = \lambda_1,$$

et retranchons de l'intégrale proposée l'expression

$$\frac{2m + 4\alpha}{2k + 2 - m - 2\alpha}\lambda_1(x, y)\sqrt{f(x, y)}:$$

la différence sera de la forme

$$\int \frac{P_1\,dx + Q_1\,dy}{A(x, y)\sqrt{f(x, y)}},$$

où P_1 et Q_1 seront au plus de degré $k - 1$. On a donc pu diminuer d'une unité le degré des polynomes qui figurent au numérateur. On continuera ainsi la réduction de proche en proche. Une valeur de k jouant un rôle important est évidemment

$$\frac{m}{2} - 1 + \alpha.$$

Supposons que m soit pair et égal à $2m'$; on pourra faire la réduction jusqu'à ce que

$$k = m' - 1 + \alpha.$$

Arrêtons-nous sur le cas particulier de l'intégrale

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\sqrt{f(x, y)}},$$

c'est-à-dire où $a = 1$, et, par conséquent, $\alpha = 0$. Quand on fait la réduction telle qu'elle vient d'être indiquée, on rencontre une circonstance intéressante; en réduisant de proche en proche il arrive un moment où $k = m' - 1$. Le polynome λ se réduit alors à une

constante et l'équation, qui donne μ, indique que $\mu = 0$. La réduction peut se faire, on a à retrancher de l'intégrale le terme

$$2\lambda \sqrt{f(x, y)};$$

mais dans la nouvelle intégrale ainsi obtenue, le degré de P et Q ne sera pas $m - \lambda$, car, dans cette hypothèse, λ doit être nécessairement nulle, et l'équation donnant μ montre que $\mu = 0$, tant que

$$k \neq m' - 1.$$

Donc le degré de P et Q tombera à $m' - 1$; nous ramènerons donc l'intégrale ci-dessus à l'intégrale

$$\int \frac{P_1\,dx + Q_1\,dy}{\sqrt{f(x, y)}},$$

dans laquelle le degré de P_1 et Q_1 est égal à $m' - 1$, et la réduction se trouve terminée.

19. Nous avons supposé au numéro précédent que $a(x, y)$ n'avait que des facteurs simples. On pourra tirer parti de la réduction précédente, dans bien des cas où il en sera autrement. Soit, par exemple,

$$A(x, y) = [A_1(x, y)]^{\alpha_1},$$

le terme $a_1(x, y)$ homogène et de degré maximum dans A_1 n'ayant que des facteurs simples, et supposons, comme plus haut, $a_1(x, y)$ premier avec $\varphi(x, y)$. On pourra faire la réduction effectuée précédemment ; on aura ici

$$a(x, y) = [a_1(x, y)]^{\alpha_1}.$$

Le polynome λ sera divisible par a_1 et, si l'on pose

$$\lambda = a_1 \lambda_1,$$

le terme à retrancher de l'intégrale sera

$$\frac{\lambda_1 \sqrt{f(x, y)}}{[A_1(x, y)]^{\alpha_1 - 1}};$$

à cette modification près, l'analyse du numéro précédent subsiste.

20. Nous avons considéré plus haut un cas particulier, celui où l'on a

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + 1,$$

et nous avons indiqué que le polynome

$$xy\sqrt{2} - 1$$

divisait une expression de la forme

$$M^2 - N^2 f(x, y),$$

M et N étant premiers entre eux, sans être lui-même de cette forme. Cherchons si l'on peut trouver une intégrale de différentielle totale de troisième espèce de la forme

$$(6) \qquad \int \frac{P\,dx + Q\,dy}{(xy\sqrt{2} - 1)\sqrt{x^4 + y^4 + 1}},$$

P et Q étant des polynomes. D'après le numéro précédent, il suffira, pour le vérifier, de supposer que P et Q sont des polynomes du *troisième* degré. En se servant de la formule (3) d'intégrabilité, on trouve la seule solution

$$P = 0, \qquad Q = 0;$$

on est donc assuré que toutes les intégrales de différentielles totales de la forme (6) (où P et Q sont des polynomes) se réduisent à des fonctions rationnelles de $x, y, \sqrt{f(x, y)}$.

21. Nous n'approfondirons pas davantage, pour le moment, l'étude des intégrales de troisième espèce. Une question intéressante devrait tout d'abord être résolue : *Peut-il exister, pour une surface dont la connexion linéaire est égale à l'unité, des intégrales de troisième espèce ne se réduisant pas à une combinaison algébrico-logarithmique de la forme*

$$\psi(x, y, z) + \Sigma A_i \log R_i(x, y, z)$$

les A *étant des constantes,* ψ *et les* R *étant des fonctions rationnelles de* x, y, z?

Reprenons l'intégrale

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{A(x, y)\sqrt{f(x, y)}}.$$

Si $A(x, y)$ admet un diviseur de la forme considérée plus haut

$$M^2 - N^2 f(x, y),$$

on pourra, de l'intégrale précédente, extraire une expression de la forme

$$\alpha \log \frac{M - N\sqrt{f}}{M + N\sqrt{f}},$$

α étant une constante convenable, de telle sorte que la différence n'admette plus les deux courbes logarithmiques

$$A(x, y) = 0, \qquad z = \pm \frac{M}{N},$$

comme nous l'avons vu au n° 16. Ce serait seulement dans le cas où $A(x, y)$ aurait un diviseur qui ne serait pas de la forme

$$M^2 - N^2 f(x, y),$$

sans que P et Q fussent divisibles par A, que l'on pourrait espérer avoir une intégrale ne se réduisant pas à une combinaison algébrico-logarithmique. Le cas particulier traité dans le numéro précédent ne nous fournit malheureusement pas l'exemple que nous aurions voulu donner.

CHAPITRE VII.

DES INTÉGRALES DOUBLES DE PREMIÈRE ESPÈCE ET DES INVARIANTS QUI S'Y RAPPORTENT.

I. — Des intégrales doubles de première espèce [1].

1. Étant donnée une surface algébrique à laquelle nous ne supposerons d'abord que des singularités ordinaires

$$f(x, y, z) = 0,$$

nous allons considérer les intégrales doubles de la forme

$$\iint F(x\, y, z)\, dx\, dy,$$

où F est une fonction rationnelle de x, y et z. Nous rechercherons quelle doit être la forme de la fonction F, pour que cette intégrale ait une valeur finie déterminée, quel que soit le continuum d'intégration. Nous nous bornons, d'ailleurs, pour bien fixer les idées, à des continuum formés de portions de surfaces analytiques en nombre fini. Nous appellerons une telle intégrale double *une intégrale double de première espèce*. Écrivons l'intégrale sous la forme

$$\iint R(x, y, z) \frac{dx\, dy}{f'_z},$$

[1] Les intégrales doubles de première espèce ont été, pour la première fois, considérées par M. Noether (*Math. Annalen*, t. II, p. 301), mais l'éminent géomètre pose ces intégrales, *a priori*, et ne fait aucune discussion sur leur forme nécessaire. Dans ses travaux ultérieurs, il ne revient plus sur le point de vue transcendant, qui a été surtout développé par M. Picard (*Comptes rendus*, 1884, et *Mémoires sur les intégrales de différentielles totales et les fonctions algébriques*, 1885-1889).

où R est une fonction rationnelle. Remarquons d'abord que l'on peut, dans l'intégration, remplacer $\frac{dx\,dy}{f'_z}$ par $\frac{dy\,dz}{f'_x}$ ou $\frac{dz\,dx}{f'_y}$. En effet, pour faire l'intégration, on doit considérer x, y et z comme fonctions de deux paramètres réels λ et μ, et l'intégrale écrite plus haut revient à

$$\iint R(x, y, z)\frac{\frac{D(x,y)}{D(\lambda,\mu)}}{f'_z}\,d\lambda\,d\mu.$$

Des équations

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \lambda}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \lambda}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \lambda}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \mu}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \mu}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \mu}=0,$$

on conclut

$$\frac{\frac{D(x,y)}{D(\lambda,\mu)}}{\frac{\partial f}{\partial z}}=\frac{\frac{D(y,z)}{D(\lambda,\mu)}}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{\frac{D(z,x)}{D(\lambda,\mu)}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

et, par suite, d'une manière abrégée,

$$\frac{dx\,dy}{f'_z}=\frac{dy\,dz}{f'_x}=\frac{dz\,dx}{f'_y}.$$

Il résulte de là qu'en tout point simple de la surface pour lequel R est finie, l'intégrale reste finie.

Nous allons montrer que, *pour que l'intégrale reste finie, il faut que* $R(x, y, z)$ *ne devienne infinie pour aucun point à distance finie*. Il est d'abord évident que R ne peut être infinie en un point de f, sans être infinie le long d'une ligne de la surface. Supposons alors que R devienne infinie le long d'une ligne simple C de la surface. Prenons sur C un point arbitraire (a, b, c), où nous pouvons supposer $f'_z \neq 0$; dans le voisinage de ce point, la courbe se projettera sur le plan des xy suivant une courbe

$$\varphi(x, y)=0,$$

$\varphi(x, y)$ étant holomorphe dans le voisinage de $x=a$, $y=b$: les axes ayant une direction quelconque, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ ne s'annule pas pour

$x = a$, $y = b$. Faisons alors le changement de variable

$$\varphi(x, y) = X.$$

En tirant de cette égalité x en fonction de y et X par un développement valable dans le voisinage de $y = b$, $X = 0$, l'intégrale prendra la forme

$$\int\int H \frac{dX\,dy}{X},$$

H restant finie et ne s'annulant pas pour la courbe C, c'est-à-dire pour $X = 0$.

Prenons comme champ d'intégration le continuum obtenu en associant à tous les points d'une ligne tracée dans le plan des X, entre o et X_0, une ligne tracée dans le plan des y entre b et y_0, X_0 et y_0 étant respectivement voisins de *zéro* et de b. Ce champ d'intégration aura une infinité de points communs avec le continuum C, et, par conséquent, d'après une remarque faite précédemment (Chap. III, n° 10), l'intégrale peut devenir infinie. Or envisageons l'intégrale

$$\int_{y_0}^{y} \int_{X_0}^{X} H \frac{dX\,dy}{X},$$

et laissant y fixe, faisons tendre X vers zéro ; l'intégrale augmentera indéfiniment. Nous voyons donc que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} R \frac{dx\,dy}{f'_z}$$

augmentera indéfiniment quand on fera tendre, d'une certaine manière, le point (x, y, z) vers un point de la courbe C.

On a supposé que C était une courbe simple de la surface ; la même conclusion subsiste si C est une courbe double, et, dans ce cas, la fonction R doit non seulement ne pas devenir infinie le long de la courbe double, mais elle doit, de plus, s'annuler le long de cette courbe. En effet, $R(x, y, z)$ contiendra X^2 en dénominateur, f'_z contiendra X en facteur ; si donc la valeur de R était différente de zéro pour $X = 0$, l'intégrale se réduirait encore à une expression de la forme

$$\int\int \frac{H\,dX\,dy}{X},$$

et deviendrait infinie pour un certain continuum.

Nous arrivons donc à la conclusion que $R(x, y, z)$ *reste finie pour tout point à distance finie et s'annule le long des courbes doubles.*

Or, si l'on prend d'abord une courbe $f(x, y) = 0$, il résulte aisément du théorème cité de Noether (Chap. V, n° 13) que toute fonction rationnelle $R(x, y)$ restant finie pour tout point à distance finie et s'annulant aux points doubles peut se mettre sous la forme d'un polynome entier en x et y. Cela résulte aussi de la discussion de la forme classique des intégrales abéliennes de première espèce, où l'on rencontre une fonction rationnelle R jouissant de la propriété indiquée et qui se réduit à une fonction entière en x et y.

Si nous revenons maintenant à la surface proposée, on conclut du théorème précédent que $R(x, y, z)$ peut se mettre sous la forme d'un polynome $Q(x, y, z)$: nous avons donc à envisager l'intégrale

$$\int\int \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z}.$$

Il faut l'étudier pour un domaine d'intégration s'étendant à l'infini. Posons

$$y = tx,$$

et prenons l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} \int_{t_0}^{t} \frac{Q(x, tx, z)x\, dt\, dx}{f'_z(x, tx, z)} \qquad f(x, tx, z) = 0.$$

Faisons varier t dans un champ fini, et faisons grandir x indéfiniment : l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} \frac{Q(x, tx, z)x\, dx}{f'_z(x, tx, z)}$$

doit être une intégrale de première espèce pour la courbe définie par la relation entre z et x

$$f(x, tx, z) = 0,$$

où t est un paramètre arbitraire ; car, dans le cas contraire, notre intégrale double deviendrait certainement infinie quand, t variant dans un champ fini, x grandirait indéfiniment. Il résulte de là

que, pour t arbitraire, le produit

$$Q(x, tx, z)x$$

doit être un polynome de degré $m-3$ en x et z. Par suite, $Q(x, y, z)$ est un polynome de degré $m-4$ en x, y et z, et *nous avons donc la forme nécessaire de l'intégrale*

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

où $Q(x, y, z)$ *est un polynome de degré* $m-4$, *tel que la surface*

$$Q(x, y, z) = 0$$

passe par la courbe double.

2. Si maintenant nous prenons l'intégrale précédente, nous devons nous demander si elle sera nécessairement de première espèce. D'après les raisonnements qui précèdent, on ne peut avoir de doute à ce sujet que pour un continuum dans le voisinage d'un point-pince sur la courbe double ou dans le voisinage d'un point triple de la courbe double, puisque, pour un point ordinaire de la ligne double, $\frac{Q}{f'_z}$ est fini. Nous allons traiter ces cas, en procédant comme nous l'avons fait pour les intégrales de différentielles totales de première espèce (Chap. V).

Soit un point-pince de la courbe double ; on ne diminue pas la généralité du raisonnement en supposant que l'axe des z est la courbe double, le point-pince étant à l'origine. Nous aurons ainsi l'équation, si le plan $x=0$ est le plan tangent au point-pince,

$$(a+\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)x^2+(\alpha' x+\beta' y+\gamma' z+\ldots)xy \\ +(\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z+\ldots)y^2=0 \qquad (a\neq 0).$$

Considérons l'intégrale double

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

où nous supposons que la surface $Q=0$ passe par l'axe des z, c'est-à-dire que

$$Q = Mx + Ny,$$

M et N étant des polynomes. Si l'on pose

$$x = uy,$$

l'équation de la surface montre immédiatement que u tend vers zéro quand le point (x, y, z) tend vers l'origine. Or, en faisant dans l'intégrale le changement de variable $x = uy$, nous avons

$$\iint \frac{(\text{M}u + \text{N})\,du\,dy}{\gamma'' + \gamma' u + \gamma u^2 + \ldots},$$

les termes non écrits au dénominateur s'annulant pour $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. En supposant, comme nous pouvons le faire, que $\gamma'' \neq 0$ (le point-pince étant général), nous avons une intégrale restant finie de quelque manière que u et y tendent vers zéro.

Plaçons-nous maintenant en un point triple de la courbe double; nous pouvons supposer que ce point est à l'origine et que les trois axes de coordonnées sont les droites doubles. On a alors l'équation

$$xyz + \varphi_4(x, y, z) + \ldots = 0,$$

tous les cônes $\varphi_i = 0$ ayant pour courbes doubles les axes de coordonnées, et l'intégrale prend la forme

$$\iint \frac{\text{Q}(x, y, z)\,dx\,dy}{xy + \varphi'_{4,z}(x, y, z) + \ldots},$$

la surface $\text{Q}(x, y, z) = 0$ passant par les trois axes, et ayant nécessairement, par suite, un point double à l'origine.

En posant $y = ux$, $z = vx$, l'intégrale devient

$$\iint \frac{\text{Q}(x, ux, vx)x\,du\,dx}{x^2[u + x\varphi'_{4,v}(1, u, v) + \ldots]},$$

la relation entre u, v et x étant

(1) $$uv + x\varphi_4(1, u, v) + \ldots = 0,$$

où les termes de moindre degré dans les $\varphi_i(1, u, v)$ sont au moins du second degré. D'autre part, $\text{Q}(x, ux, vx)$ contient x^2 en facteur et est certainement de la forme $x^2(\text{M}u + \text{N}v)$. Donc, l'intégrale peut s'écrire

(2) $$\iint \frac{(\text{M}u + \text{N}v)x\,du\,dx}{u + x\varphi'_{4,v}(1, u, v) + \ldots}.$$

Or, on peut supposer qu'on se trouve dans une région autour de l'origine pour laquelle u et v restent finies, car, dans le cas contraire, on ferait un autre changement de variables en considérant d'autres rapports des trois lettres x, y, z entre elles. Nous pouvons donc dire que nous avons une surface représentée par l'équation (1); nous avons à considérer ceux de ses points qui correspondent à des valeurs de x voisines de zéro et à des valeurs finies de u et v, l'une au moins de ces dernières étant nécessairement voisine de zéro. Tous ces points sont des points simples de la surface (1), sauf les points correspondant à $u = 0$, $v = 0$: la surface (1) admet en effet la ligne double

$$u = 0, \qquad v = 0.$$

Nous pouvons regarder l'intégrale (2) comme une intégrale double relative à (1), dans laquelle le coefficient de $du\,dx$ au numérateur s'annule pour la ligne double. Nous sommes ainsi assurés, d'après ce qui précède, que *l'intégrale reste finie.*

Nous conclurons donc que la condition nécessaire et suffisante pour que *l'intégrale double, où* Q *est un polynome de degré* $m-4$,

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

soit de première espèce est que la surface de degré $m-4$

$$Q(x, y, z) = 0$$

passe par la courbe double.

3. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que la surface n'avait que des singularités ordinaires, c'est-à-dire une ligne double pouvant avoir seulement des points triples, ce qui correspond à la réduction générale des singularités d'une surface algébriques.

Il est d'un grand intérêt d'examiner certaines circonstances pouvant se rencontrer fréquemment, de façon à ne pas avoir à faire la réduction générale. Le cas le plus simple sera celui d'un point double isolé avec un cône de tangentes irréductible; nous allons voir que la présence d'un tel point n'entraîne aucune con-

séquence pour le polynome Q. En mettant le point double à l'origine, nous avons, pour l'équation de la surface,

$$\varphi_2(x, y, z) + \varphi_3(x, y, z) + \ldots = 0.$$

Posons

$$x = Xz, \qquad y = Yz,$$

l'équation de la surface devient

$$(3) \qquad \varphi_2(X, Y, 1) + z\varphi_3(X, Y, 1) + \ldots = 0.$$

Prenons l'intégrale double

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dz}{f'_y};$$

elle devient

$$\iint \frac{Q(Xz, Yz, z)\,dX\,dz}{\varphi'_{2,Y}(X, Y, 1) + z(\quad)}.$$

On peut supposer que X et Y restent finies, car, autrement, on ferait un autre changement de variables; nous avons donc à considérer, pour des valeurs très petites de z, des valeurs finies de X et Y. Dans ces conditions, le point (X, Y, z) est certainement un point simple de la surface définie par l'équation (3), puisque φ_2 est irréductible. *L'intégrale reste donc finie,* et la présence du point double n'entraîne aucune conséquence pour le polynome Q.

On peut discuter, avec les formules précédentes, beaucoup d'autres cas; tout d'abord, la même conclusion subsistera, en général, quand le cône

$$\varphi_2(x, y, z) = 0$$

se composera de deux plans distincts. Dans ce cas, l'équation

$$\varphi_2(X, Y, 1) = 0$$

donnera deux droites distinctes. Si, pour le point de rencontre de ces deux droites, on a

$$\varphi_3(X, Y, 1) \neq 0,$$

la surface (3) n'aura pas de points multiples pour z voisin de zéro et pour X, Y finis. On peut encore aller plus loin; lorsque les coordonnées (α, β) du point de rencontre des droites $\varphi_2(X, Y, 1) = 0$, annulent le polynome φ_3, la surface (3) aura le point double

$(\alpha, \beta, 0)$, mais, en général, le cône des tangentes sera irréductible, et nous n'avons aucune condition.

Il en est encore ainsi, *en général,* même quand le point est un point *uniplanaire,* c'est-à-dire quand $\varphi_2(x, y, z)$ est un carré parfait. En effet, la surface (3) aura, comme points doubles correspondant à $z = 0$, les points de rencontre de la droite double

$$\varphi_2(X, Y, 1) = 0$$

avec la courbe $\varphi_3(X, Y, 1) = 0$; ces points doubles seront, en général, des points doubles isolés ordinaires pour la surface (3), et, par suite, nous ne trouvons aucune condition à imposer au polynome Q *par le fait de la présence d'un point uniplanaire général.*

Il en sera autrement si l'on a cette sorte de point uniplanaire désigné par les géomètres anglais sous le nom de *tacnode,* et dont nous avons déjà parlé (p. 77). L'équation est, dans ce cas, susceptible de se mettre sous la forme

$$f(x, y, z) = x^2 + x\psi_2(x, y, z) + \varphi_4(x, y, z) + \ldots = 0;$$

ψ_2 est un polynome homogène du second degré en x, y et z, et φ_4 est du quatrième degré; c'est le cas où φ_2 est un carré parfait, et où φ_3 contient une fois en facteur l'expression linéaire dont φ_2 est le carré. En posant

$$x = Xz, \qquad y = Yz,$$

nous avons la relation

$$(\Sigma) \qquad F(X, Y, Z) = X^2 + Xz\psi_2(X, Y, 1) + \ldots = 0.$$

Cette surface Σ aura pour ligne double

$$X = 0, \qquad z = 0.$$

L'intégrale

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\,dy\,dz}{f'_x}$$

devient

$$\iint \frac{Q(Xz, Yz, z)\,dY\,dz}{F'_X}.$$

Pour que l'intégrale soit de première espèce, il est nécessaire que le polynome, qui figure au numérateur, égalé à zéro, repré-

sente une surface passant par la ligne double de Σ. Il en sera ainsi si la surface

$$Q(x, y, z) = 0$$

passe par le tacnode. Il est clair, d'ailleurs, que cette condition est suffisante pourvu que le tacnode soit un point général de cette sorte. Ainsi, *la présence d'un tacnode entraîne* une *condition pour les intégrales doubles de première espèce* [1].

4. Nous avons, aux nos **1** et **2**, dans la recherche des intégrales doubles de première espèce, supposé que la surface avait seulement, comme lignes multiples, des lignes doubles. Il est essentiel de voir qu'*une intégrale de première espèce a, dans tous les cas possibles, la forme précédemment trouvée*. Nous aurons bientôt besoin de ce résultat pour arriver à la notion du genre d'une surface.

Reprenons l'intégrale sous la forme

$$\iint R(x, y, z) \frac{dx\,dy}{f'_z},$$

la surface ayant, cette fois, des singularités entièrement arbitraires. Je dis d'abord que l'intégrale simple

$$\int R(x, y, z) \frac{dx}{f'_z},$$

qu'on peut regarder comme une intégrale abélienne relative à la courbe $f(x, \bar{y}, z) = 0$, est une intégrale de première espèce. Nous donnons à y une valeur arbitraire, de sorte que les points multiples de la courbe $f(x, \bar{y}, z) = 0$ sont à l'intersection de la courbe avec le plan $y = \bar{y}$. Soit un de ces points de rencontre dont nous désignerons l'x par $a(y)$, la fonction $a(y)$ étant une fonction holomorphe de y dans un certain intervalle suffisamment petit.

On pourra, dans le voisinage de $x = a$, développer $\frac{R}{f'_z}$ de la

---

[1] M. Noether a étudié l'influence de points singuliers d'espèce variée sur le genre d'une surface algébrique dans les *Nachrichten* de la *Société Royale de Göttingen* (1871).

manière suivante :

$$\frac{R(x, y, z)}{f'_z} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \ldots,$$

les coefficients des puissances de $x - a$ non écrites étant supérieurs à $-\alpha$, et le coefficient A étant une fonction holomorphe de y dans l'intervalle considéré. On a alors à prendre l'intégrale double

$$\iint \left[\frac{A}{(x-a)^\alpha} + \ldots\right] dx\, dy.$$

Posons

$$x = a + u;$$

nous aurons alors l'intégrale

$$-\iint \left(\frac{A}{u^\alpha} + \ldots\right) du\, dy.$$

Si l'on avait

$$\alpha \geqq 1,$$

on pourrait avoir un continuum d'intégration pour lequel l'intégrale sera infinie : on a donc

$$\alpha < 1,$$

et, par suite, l'intégrale

$$\int R(x, y, z) \frac{dx}{f'_z}$$

reste finie pour $x = \alpha$. Ainsi, l'intégrale précédente relative à la courbe $f(x, \bar{y}, z) = 0$ reste finie pour tout point à distance finie. Il en résulte que $R(x, y, z)$ est un polynome en x et z; on établirait de la même façon que $R(x, y, z)$ est un polynome en y et z, et par suite $R(x, y, z)$ est un polynome en x, y et z. Nous arrivons donc à la conclusion que, *quelles que soient les singularités, une intégrale de première espèce a nécessairement la forme*

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z},$$

et l'on voit, comme plus haut, que $Q(x, y, z)$ *est au plus du degré* $m - 4$.

Nous avons là des conditions nécessaires; il faudra ensuite faire une discussion pour écrire les conditions supplémentaires. La

surface pourra avoir des points multiples isolés qui nécessiteront une discussion spéciale; relativement aux lignes multiples, il résulte évidemment de l'analyse ci-dessus qu'un plan arbitraire

$$y = \text{const.}$$

coupera la surface $Q = 0$ suivant une courbe qui sera une adjointe d'ordre $m - 4$ de l'intersection de la surface proposée par le même plan, et, sous cette condition, l'intégrale restera certainement finie pour le voisinage d'un point pris arbitrairement sur la courbe multiple. Mais il pourra y avoir sur celle-ci certains points particuliers pour lesquels une discussion sera nécessaire; ainsi, par exemple, pour prendre un cas très simple, si une surface a, comme plus haut, une courbe double le long de laquelle les deux plans tangents sont, en général, différents, et qui a seulement certains *points-pince* de nature générale, il suffira que l'adjointe $Q = 0$ passe par la ligne double, sans qu'il y ait aucune condition supplémentaire à ajouter pour les points-pince. Mais si le point-pince est spécial, il pourra y avoir des conditions supplémentaires à écrire; il en sera ainsi dans le cas où le coefficient γ'' sera nul.

On s'en convaincra en prenant la surface

$$(a + \gamma z)x^2 + (\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)xy + (\alpha'' x + \beta'' y)y^2 = 0,$$

qui admet la ligne double $x = 0, y = 0$, avec un point-pince à l'origine. L'intégrale

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

$Q(x, y, z)$ étant un polynome tel que la surface

$$Q(x, y, z) = 0$$

passe par la ligne double, reste finie dans le voisinage de tout point de la courbe double à distance finie, sauf pour l'origine.

Dans tous les cas possibles, la recherche des conditions supplémentaires se déduit aisément de la réduction supposée effectuée des singularités, ou, ce qui revient au même, des expressions des coordonnées x, y, z des points de la surface dans le voisinage d'un point singulier, exprimées au moyen d'un nombre limité de développements holomorphes par rapport à deux paramètres.

Toute surface $Q(x, y, z) = 0$ *d'ordre* $m - 4$, *pour laquelle le premier membre de l'équation peut servir à former une intégrale double de première espèce, est dite une* surface adjointe *d'ordre* $m - 4$. *Le système linéaire formé par ces adjointes est désigné sous le nom de* système canonique.

5. Un cas simple et intéressant est celui d'une surface ayant des lignes multiples et des points multiples isolés; ces lignes et ces points étant de la nature suivante. En un point arbitraire de la ligne multiple, les plans tangents sont différents; il peut seulement y avoir certains points particuliers de la ligne multiple où *deux* plans tangents sont confondus, et l'on suppose que l'on soit dans le cas le plus général où cette circonstance se présente. Relativement à un point multiple isolé, on suppose que la surface ayant pour équation

$$\varphi_p(x, y, z) + \varphi_{p+1}(x, y, z) + \ldots = 0,$$

la transformation

$$x = Xz, \qquad y = Yz$$

fait correspondre à ce point une courbe

$$z = 0, \qquad \varphi_p(X, Y, 1) = 0,$$

dont tous les points à distance finie sont des points simples pour la surface transformée.

Il résulte d'abord, de ce que nous avons dit plus haut, que *la surface adjointe*

$$Q(x, y, z) = 0$$

aura une ligne multiple d'ordre p *de la surface comme ligne multiple de degré* $p - 1$.

Pour voir la condition relative à un point multiple *isolé* d'ordre q, faisons dans l'intégrale

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dz}{f'_y}$$

le changement de variable $x = Xz$, $y = Yz$: l'intégrale devient

$$\iint \frac{Q(Xz, Yz, z)\,z\,dX\,dz}{z^{q-1}[\varphi'_{p,Y}(X, Y, 1) + z(\qquad)]},$$

et l'on voit de suite qu'au numérateur, le polynome $Q(Xz, Yz, z)$ doit contenir z^{q-2} en facteur; donc *la surface adjointe* $Q = 0$ *admet le point multiple isolé d'ordre q de la surface comme point multiple d'ordre* $q - 2$; c'est l'extension de ce que nous avons trouvé pour $q = 2$, cas dans lequel aucune condition ne se trouve imposée à l'adjointe.

6. Terminons cette Section par une remarque qu'on peut regarder comme *une extension du théorème d'Abel aux intégrales doubles de première espèce.* Soit la surface

$$f(x, y, z) = 0,$$

et considérons les deux faisceaux de surfaces

$$\begin{aligned} A(x, y, z) + \lambda B(x, y, z) &= 0, \\ C(x, y, z) + \mu D(x, y, z) &= 0. \end{aligned}$$

Supposons que les trois équations précédentes définissent un certain nombre m de points

$$(x_1, y_1, z_1), \quad \ldots, \quad (x_m, y_m, z_m),$$

variables avec λ et μ, et décrivant toute la surface, c'est-à-dire que le déterminant fonctionnel de x_i et y_i, par rapport à λ et μ, n'est pas identiquement nul. Nous désignons, comme plus haut, par

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\, dx\, dy}{f'_z}$$

une intégrale double de première espèce de la surface, et nous formons la somme

$$(E) \qquad \frac{Q(x_1, y_1, z_1)\dfrac{D(x_1, y_1)}{D(\lambda, \mu)}}{f'_{z_1}} + \ldots + \frac{Q(x_m, y_m, z_m)\dfrac{D(x_m, y_m)}{D(\lambda, \mu)}}{f'_{z_m}}.$$

C'est une fonction symétrique de $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_m, y_m, z_m)$; elle est donc une fonction rationnelle de λ et μ, soit

$$R(\lambda, \mu).$$

Or, si l'on prend un continuum arbitraire d'intégration dans le domaine des variables complexes (λ, μ), il y correspondra un

continuum pour (x_i, y_i, z_i), et l'on aura

$$\sum_{i=1}^{i=m} \iint \frac{Q(x_i, y_i, z_i)\,dx_i\,dy_i}{f'_{z_i}} = \iint R(\lambda, \mu)\,d\lambda\,d\mu.$$

Or, quel que soit le continuum régulier pris dans l'espace (λ, μ), le premier membre restera fini; il en sera donc de même du second. Mais une intégrale double d'une fonction rationnelle de λ et μ ne peut rester finie pour tout continuum d'intégration, à moins qu'elle ne soit toujours nulle. On a donc identiquement

$$R(\lambda, \mu) = 0,$$

et, par suite, *l'expression* E *est identiquement nulle,* ce qui constitue une extension du théorème d'Abel aux intégrales doubles de première espèce. On voit que nous avons suivi absolument la même voie que celle qui est souvent employée pour établir le théorème d'Abel en se limitant aux intégrales de première espèce; au point de vue analytique, cette extension est d'ailleurs plus curieuse qu'utile, et nous n'y insisterons pas ([1]).

II. — Du genre géométrique (*Flächengeschlecht*) des surfaces algébriques ([2]).

6. Dans la théorie des courbes algébriques, la considération des intégrales de première espèce conduit à un nombre qui joue un rôle considérable : c'est le nombre habituellement désigné par p, et qui est égal au nombre des intégrales de première espèce linéairement indépendantes. Considérons pareillement une surface

---

([1]) Dans deux Mémoires du *Journal de Mathématiques* (1887 et 1890), M. Humbert a fait d'élégantes applications géométriques de l'extension du théorème d'Abel aux intégrales multiples.

([2]) La notion de genre a été introduite dans la théorie des surfaces par Clebsch dans une courte Note des *Comptes rendus* (décembre 1868). Elle a été ensuite approfondie par M. Noether dans un Mémoire du tome II des *Math. Annalen,* que nous avons déjà cité, et surtout dans son Mémoire fondamental du tome VIII de la même collection. Dans ce dernier Mémoire, M. Noether se place uniquement au point de vue algébrique.

algébrique irréductible *quelconque* de degré m

$$f(x, y, z) = 0,$$

et soit

$$\iint \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}$$

l'expression générale des intégrales doubles de première espèce. Le polynome Q est un polynome de degré $m - 4$, et dépend d'une manière linéaire et homogène d'un certain nombre de constantes arbitraires. Soit p_g ce nombre, de telle manière que, si l'on désigne par

$$(S) \qquad Q_1, \quad Q_2, \quad \ldots, \quad Q_{p_g}$$

p_g polynomes correspondant à des intégrales de première espèce, entre lesquels on n'a pas de relation homogène et linéaire à coefficients constants, l'expression générale de Q sera

$$Q = A_1 Q_1 + A_2 Q_2 + \ldots + A_{p_g} Q_{p_g},$$

les A étant des constantes. Quand nous disons qu'entre les termes de la suite (S) n'existe pas de relation homogène et linéaire, on peut entendre indifféremment qu'une telle relation

$$\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 + \ldots + \alpha_{p_g} Q_{p_g} = 0$$

(où les α sont des constantes qui ne sont pas toutes nulles) ne peut avoir lieu, soit qu'on y considère x, y, z comme trois variables indépendantes, soit que le point (x, y, z) appartienne à la surface f. Les deux points de vue reviennent au même, puisque les Q sont de degré inférieur à m.

Le nombre p_g s'appelle le *genre géométrique de la surface;* Noether le désigne aussi sous le nom de *Flächengeschlecht;* il est l'analogue du genre riemannien p d'une courbe algébrique. Nous verrons bientôt (Chap. VIII) pourquoi nous ajoutons l'indice g : c'est qu'il y aura lieu d'introduire dans certains cas, à côté de p_g, un autre nombre qui sera désigné sous le nom de *genre numérique*.

7. *Le genre p_g est un nombre invariant,* c'est-à-dire qu'il est le même pour deux surfaces qui se correspondent birationnel-

lement. Soient

$$f(x, y, z) = 0, \qquad F(X, Y, Z) = 0$$

les équations de deux surfaces algébriques; on suppose que l'on ait simultanément

$$x = R_1(X, Y, Z),$$
$$y = R_2(X, Y, Z),$$
$$z = R_3(X, Y, Z)$$

et

$$X = r_1(x, y, z),$$
$$Y = r_2(x, y, z),$$
$$Z = r_3(x, y, z),$$

les R et r étant des fonctions *rationnelles* des lettres dont elles dépendent. Nous disons, dans ce cas, que les deux surfaces se correspondent par une transformation birationnelle. Il est immédiat que le genre géométrique sera le même pour les surfaces f et F.

En effet, à toute intégrale double de première espèce de f correspond une intégrale double de première espèce de F et inversement, comme le montrent de suite les substitutions birationnelles. *Les genres des deux surfaces sont donc égaux* ([1]).

8. Indiquons quelques exemples simples. Soit tout d'abord la surface la plus générale de degré m; comme cette surface n'a pas de points singuliers, on aura

$$p_g = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6},$$

ce nombre étant le nombre des arbitraires dans un polynome d'ordre $m-4$ à trois variables. D'après ce que nous avons dit dans la Section précédente, un point double isolé ne diminue pas en général le genre; nous avons vu qu'il en était ainsi, non pas

([1]) La démonstration de ce théorème, qui est immédiate, comme on vient de le voir, quand on se place au point de vue transcendant, après avoir discuté complètement la forme des intégrales doubles de première espèce, est, au contraire, très délicate quand on se place au point de vue algébrique, comme l'a fait Noether (voir *Math. Annalen*, t. VIII, p. 514).

seulement pour un point double à cône indécomposable, mais pour un point biplanaire général et même pour un point uniplanaire général. Au contraire, un tacnode général diminue le genre géométrique d'une unité.

Si, sur une surface, il existe une famille (dépendant d'un paramètre arbitraire) de courbes unicursales, le genre de la surface sera nul. Dans ce cas, il y aura certainement sur la surface une courbe, dépendant d'un paramètre arbitraire u, susceptible d'être représentée par deux équations de la forme

$$\varphi(x, y, u) = 0,$$
$$z = R(x, y, u),$$

φ étant un polynome en x et y, dont les coefficients dépendent algébriquement du paramètre u, et R étant rationnel en x et y et algébrique en u.

En effet, la famille de courbes gauches pourra nécessairement se mettre sous la forme

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad z = R(x, y),$$

les coefficients dans φ et R dépendant du paramètre arbitraire. Or, en laissant indéterminés tous les coefficients de φ et R et écrivant que cette courbe est située sur la surface, on aura un certain nombre de relations algébriques entre ces coefficients. Ces relations devront nécessairement permettre de laisser au moins un de ces coefficients arbitraires, et l'on a alors le résultat annoncé.

Si cette courbe est unicursale, on pourra exprimer x, y, z rationnellement en fonction d'un paramètre λ, les coefficients des puissances de λ dans ces fonctions rationnelles étant des fonctions nécessairement algébriques de u. C'est ce qui résulte de ce que, pour avoir ces expressions, il faut, en procédant comme on le fait d'habitude, prendre sur la courbe un certain nombre de points; on pourra prendre, par exemple, des points dont on se donnera les x, les autres coordonnées dépendront alors algébriquement de u. Finalement, on pourra exprimer les coordonnées d'un point arbitraire de la surface sous la forme

$$x = P_1(\lambda, u),$$
$$y = P_2(\lambda, u),$$
$$z = P_3(\lambda, u),$$

les P étant *rationnels* par rapport à λ et *algébriques* par rapport à u. Supposons maintenant que la surface possède une intégrale double de première espèce; celle-ci sera de la forme

$$\int\int S(\lambda, u)\, d\lambda\, du,$$

S étant rationnel en λ et algébrique en u. Or, une telle intégrale ne peut être de première espèce. Prenons, en effet, une valeur arbitraire de u, soit u_0; la fonction rationnelle S en λ aura au moins un pôle correspondant à une valeur de u. On peut supposer ce pôle à distance finie et regarder son affixe comme une fonction holomorphe $a(u)$ de u dans le voisinage de u_0; en posant alors

$$\lambda = a(u) + \lambda',$$

notre intégrale prend la forme

$$\int\int \frac{H\, d\lambda'\, du}{\lambda'^m},$$

m étant un entier au moins égal à *un*, et H une fonction finie et différente de zéro pour $\lambda' = 0$, $u = u_0$.

Il est par conséquent visible que, pour un continuum convenable d'intégration, l'intégrale devient infinie, ce qui établit la remarque énoncée plus haut.

On en déduit, en particulier, que, *pour une surface réglée, on a*

$$p_g = 0.$$

9. Prenons, comme autre exemple, les surfaces déjà considérées, pour lesquelles on a

$$(4) \qquad \begin{cases} x = R(\lambda, \mu, \lambda', \mu'), \\ y = R_1(\lambda, \mu, \lambda', \mu'), \\ z = R_2(\lambda, \mu, \lambda', \mu'), \end{cases}$$

les R étant rationnelles par rapport aux λ et aux μ; de plus, λ et μ sont liées par une relation algébrique de genre p

$$f(\lambda, \mu) = 0,$$

et les deux paramètres λ' et μ' par une seconde relation algébrique

de genre p'

$$F(\lambda', \mu') = 0.$$

Nous supposons, en outre, qu'à un point arbitraire de la surface ne correspondent qu'un seul système de valeurs (λ, μ) et un seul système de valeurs (λ', μ').

Cherchons le genre p_g de la surface définie par les équations (4). Soient

$$\int P_1(\lambda, \mu)\,d\lambda, \quad \ldots, \quad \int P_p(\lambda, \mu)\,d\lambda,$$

p intégrales de première espèce linéairement indépendantes de la courbe f, et

$$\int Q_1(\lambda', \mu')\,d\lambda', \quad \ldots, \quad \int Q_{p'}(\lambda', \mu')\,d\lambda'$$

p' intégrales de première espèce linéairement indépendantes de la courbe F. Formons l'intégrale double

$$\int\int P_i(\lambda, \mu).Q_k(\lambda', \mu')\,d\lambda\,d\lambda'.$$

Elle sera évidemment de la forme

$$\int\int P(x, y, z)\,dx\,dy,$$

P étant rationnelle en x, y, z, puisque, par hypothèse, les λ et μ sont rationnelles en x, y et z. Nous formons ainsi pp' intégrales doubles de première espèce, qui sont linéairement indépendantes, et, par suite, le genre de la surface est au moins égal à pp'.

Il est aisé de montrer que ce genre est précisément égal à pp'. Toute intégrale double de la surface est, en effet, de la forme

$$\int\int \varphi(\lambda, \mu, \lambda', \mu')\,d\lambda\,d\lambda'.$$

Supposons-la de première espèce. Il sera d'abord nécessaire que l'intégrale simple

$$\int \varphi(\lambda, \mu, \lambda', \mu')\,d\lambda$$

(λ' et μ' étant considérés comme des constantes) soit une intégrale

de première espèce pour la courbe

$$f(\lambda, \mu) = 0.$$

On a donc

$$\varphi(\lambda, \mu, \lambda', \mu') = \sum A_i P_i(\lambda, \mu) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

les A ne dépendant que de λ' et μ' dont ils sont nécessairement des fonctions rationnelles. On voit ensuite que

$$\int \left[\sum A_i P_i(\lambda, \mu)\right] d\lambda'$$

doit être une intégrale de première espèce de la courbe

$$F(\lambda', \mu') = 0,$$

et, par suite,

$$\sum_{i=1}^{i=p} A_i(\lambda', \mu').P_i(\lambda, \mu) = \sum_{k=1}^{k=p'} B_k(\lambda, \mu).Q_k(\lambda', \mu'),$$

les B étant rationnels en λ et μ. Donnons à (λ, μ) p systèmes de valeurs fixes arbitraires; on pourra tirer, par des équations du premier degré, les $A_i(\lambda', \mu')$ en fonctions linéaires des $Q_k(\lambda', \mu')$; donc $\varphi(\lambda, \mu, \lambda', \mu')$ est de la forme

$$\varphi(\lambda, \mu, \lambda', \mu') = \sum \alpha_{ik} P_i(\lambda, \mu).Q_k(\lambda', \mu'),$$

les α étant des constantes; il en résulte que toutes les intégrales doubles de première espèce sont de la forme trouvée plus haut. En définitive, nous avons, pour la surface définie par les équations (4),

$$p_g = pp'.$$

III. — Digression sur les systèmes linéaires de courbes tracées sur une surface (¹).

10. Avant de continuer l'étude des surfaces adjointes d'ordre

(¹) Les points essentiels de cette section sont empruntés à deux Mémoires remarquables de M. Enriques, sur lesquels nous aurons ultérieurement à revenir [*Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche* (*Mémoires de l'Académie de Turin*, 1894), et *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche* (*Mem. della Societa Italiana d. Scienze*, 3ᵉ série, t. X; 1896)].

$m - 4$, il est nécessaire que nous fassions quelques remarques générales sur les systèmes linéaires de courbes tracées sur une surface algébrique S. Nous considérons l'intersection de la surface S avec un système linéaire de surfaces, c'est-à-dire avec un système de surfaces

$$(L) \qquad \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \ldots + \alpha_{r+1} L_{r+1} = 0,$$

les L étant des polynomes en (x, y, z), et les α des constantes arbitraires. Il peut y avoir des courbes fixes d'intersection (c'est-à-dire indépendantes des α) du système L avec S; *la courbe ou les courbes qui nous intéressent sont les courbes de rencontre variables avec les* α, et quand nous parlons de la courbe ou des courbes définies par L, il n'est question que de la courbe ou des courbes variables.

Le système linéaire sera dit *réductible* ou *irréductible,* suivant que la courbe variable d'intersection sera elle-même réductible ou non. La courbe générale d'un système linéaire peut avoir des points fixes que l'on appelle *points-bases.*

Un système linéaire sera dit d'ordre r, si par r points arbitraires de la surface passe une seule courbe du système; c'est le cas où, dans l'équation écrite ci-dessus, les L sont des fonctions linéairement indépendantes sur la surface [1]. Un système linéaire porte le nom de *faisceau* lorsque son ordre est égal à *un,* et le nom de *réseau* lorsque son ordre est égal à deux.

---

[1] On peut se demander si une famille de courbes *irréductibles,* tracées sur une surface telle, que par r points arbitraires de la surface ne passe qu'une seule courbe de la famille, forme nécessairement un système linéaire. M. Enriques a montré (*Rendiconti della R. Accademia d. Lincei,* 1893) que la réponse est affirmative si r est supérieur à *un*. Pour le cas de $r = 1$, il peut en être autrement, comme le montre l'exemple des génératrices d'une surface réglée. Il y a cependant des cas où le théorème de M. Enriques est encore applicable pour $r = 1$. C'est ce qu'a fait voir M. Castelnuovo [*Alcuni resultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (*Societa Italiana delle Scienze,* 1896)] pour les surfaces dont le genre géométrique égale le genre numérique; M. Humbert a aussi montré qu'il en est de même pour les surfaces qui n'ont pas d'intégrales de différentielles totales de première espèce [*Sur quelques points de la théorie des surfaces algébriques* (*Journal de Math.*, 1894)]. Ces résultats intéressants semblent indiquer quelque dépendance entre la théorie du genre numérique et celle des intégrales de première espèce; nous aurons à y revenir.

On appelle degré D d'un système linéaire le nombre des points de rencontre variables de deux courbes du système L.

11. Faisons quelques remarques relatives aux intersections de deux courbes générales du système L, et qui nous permettront d'établir une distinction entre les différents systèmes que l'on peut avoir à considérer. Il est d'abord évident que si deux courbes quelconques du système ont *toujours* une partie commune, cette partie commune est fixe. Une remarque non moins évidente est relative au cas d'un faisceau linéaire ($r = 1$). Un point commun à deux courbes du faisceau doit être commun à toutes, comme le montre l'équation $\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 = 0$; ce point est donc un point-base ; il n'existe pas de points de rencontre variables et, par suite, $D = 0$.

Supposons maintenant $r > 1$. Le cas le plus général sera celui où, deux courbes générales du système ayant D points de rencontre variables, la condition de passer par un point de la surface n'entraîne pas, comme conséquence, pour ces courbes, l'obligation de passer par d'autres points déterminés par le premier. En d'autres termes, le système linéaire d'ordre $r - 1$, formé par les courbes L qui passent par un point arbitrairement donné de la surface, est de degré $D - 1$. On dit alors que le *système est simple.*

Une autre circonstance moins générale peut se présenter : c'est celle où les courbes L, qui sont assujetties à passer par un point arbitraire, passent nécessairement par $m - 1$ autres points, et forment alors un système linéaire de degré $D - m$. Dans ce cas, les D points de rencontre se partagent en s groupes de m points, et l'on a $D = ms$. On dit alors que le système forme une *involution* I_m. Il est clair que ce fait se présente toujours pour un réseau, si la surface n'est pas rationnelle.

Enfin, il peut arriver, r étant plus grand que *un*, que deux courbes générales du système n'aient pas de points de rencontre variables. Imaginons toujours le système linéaire d'ordre $r - 1$, formé par les courbes L qui passent par un point. Toutes ces courbes n'ayant pas de points de rencontre variables auront forcément une courbe commune, passant par ce point, qui fera partie de la courbe générale et qui sera déterminée par un *seul* point. Assujettissons ce système d'ordre $r - 1$ à passer par un second

point fixe, nous détacherons encore, de la courbe générale, une seconde courbe jouissant de la même propriété. En continuant ainsi de proche en proche, on voit finalement que la courbe générale se composera d'au moins r courbes distinctes, car il pourra encore rester, la réduction précédente étant achevée, un certain nombre de courbes composantes. Soit m le nombre total de ces courbes ; elles forment un ensemble dépendant de r paramètres, et qui est tel que par chaque point de la surface ne passe qu'une seule de ces courbes. On dit alors que le système linéaire est formé de $m (m \geqq r)$ courbes d'un faisceau, et, dans ce cas, on a évidemment $D = 0$.

Revenant au cas où D est plus grand que *zéro,* nous ferons encore la remarque importante que *les* D *points d'intersection variables doivent décrire la surface tout entière.* Supposons, en effet, que quelques-uns de ces points décrivent une courbe fixe (Γ) de la surface ; une courbe particulière quelconque du système L coupera Γ en un certain nombre de points. L'un au moins de ces points appartiendra à une autre courbe du système qui, dans l'hypothèse admise, ne pourra que rester fixe quand on la fera varier. Le point considéré serait donc un point fixe et non un point variable de rencontre, comme nous l'avons supposé.

Ajoutons finalement que l'on a, entre r et D, si $r > 1$ et $D > 0$, l'inégalité évidente

$$D \geqq r - 1,$$

puisque par $r - 1$ points arbitraires on peut certainement faire passer deux courbes L.

12. Tout système linéaire simple, d'ordre r supérieur à deux, permet d'effectuer une transformation de la surface dans un espace $\Sigma_{r'}$ à r' dimensions $(r' \leqq r)$, pourvu que r' soit $\geqq 3$. Prenons $r' + 1$ surfaces L arbitraires et envisageons le système

$$(L) \qquad \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \ldots + \alpha_{r'+1} L_{r'+1} = 0 ;$$

posons

$$X_1 = \frac{L_1}{L_{r'+1}}, \qquad X_2 = \frac{L_2}{L_{r'+1}}, \qquad \ldots, \qquad X_{r'} = \frac{L_{r'}}{L_{r'+1}}.$$

Cette transformation fera correspondre à la surface S, dans l'es-

pace à trois dimensions, une surface S′ dans l'espace à r' dimensions $(X_1, X_2, \ldots, X_{r'})$. A un point arbitraire de S correspond un seul point de S′, et réciproquement, car, quand les r' équations précédentes en (x, y, z) ont une solution commune correspondant à un point de la surface, elles n'en ont qu'une en général, puisque le système est simple et que $r' \geqq 3$.

Cette surface S′ sera d'ordre D. En effet, envisageons dans l'espace $\Sigma_{r'}$ deux hyperplans arbitraires

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots + A_{r'} X_{r'} + A_{r'+1} = 0,$$
$$A'_1 X_1 + A'_2 X_2 + \ldots + A'_{r'} X_{r'} + A'_{r'+1} = 0,$$

qui déterminent une variété linéaire d'ordre $r' - 2$; elle coupera la variété S′ d'ordre 2 en un certain nombre de points déterminés par les équations

$$A_1 L_1 + A_2 L_2 + \ldots + A_{r'+1} L_{r'+1} = 0,$$
$$A'_1 L_1 + A'_2 L_2 + \ldots + A'_{r'+1} L_{r'+1} = 0,$$

qui ont, sur la surface S, D solutions communes variables avec les A. Le système linéaire étant simple, à ces solutions correspondront, en général, des points distincts de S′ ; par suite, la surface S′ est bien d'ordre D.

Remarquons, en outre, qu'à une surface (L) correspond dans $\Sigma_{r'}$ un hyperplan

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_{r'} X_{r'} + \alpha_{r'+1} = 0$$

et réciproquement, et, par suite, que les sections hyperplanes d'ordre $r - 1$ de S′ correspondent à des courbes de S appartenant au système linéaire.

Si le système (L), au lieu d'être simple, appartenait à une involution I_m, on pourrait encore effectuer la même transformation, mais alors cette transformation ne serait plus biunivoque. A chaque point de S correspondrait un point de S′, mais à chaque point de S′ correspondrait m points de S, et l'ordre de S′ serait égal à $\frac{D}{m}$.

On peut cependant, même dans le cas d'une involution, modifier la transformation précédente, de manière qu'elle donne lieu à une correspondance biunivoque dans tous les cas.

Plaçons-nous toujours dans le cas général ; prenons r' surfaces L

arbitraires $L_1, L_2, \ldots, L_{r'}$, et envisageons le système

$$(L) \qquad \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \ldots + \alpha_{r'} L_{r'} = 0.$$

Adjoignons à ces surfaces deux surfaces déterminées P_1 et P_2, que l'on peut toujours supposer telles que la courbe du faisceau

$$(P) \qquad \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 = 0$$

(les β désignant des constantes arbitraires) qui passe par un point quelconque A de S ne passe pas par les points conjugués de A dans l'involution L, si elle existe. Nous poserons alors

$$X_1 = \frac{L_1}{L_{r'}}, \qquad X_2 = \frac{L_2}{L_{r'}}, \qquad \ldots, \qquad X_{r'-1} = \frac{L_{r'-1}}{L_{r'}}, \qquad X_{r'} = \frac{P_1}{P_2}.$$

Cette transformation est biunivoque, comme il résulte immédiatement des hypothèses faites sur P_1 et P_2 : à la surface S dans l'espace Σ_3 correspond une surface S′ dans l'espace $\Sigma_{r'}$ et ces deux surfaces se correspondent point par point. Chaque point de S′ peut être considéré comme obtenu par l'intersection d'une droite parallèle à une direction fixe, l'axe des $X_{r'}$, avec un hyperplan $P_2 X_{r'} - P_1 = 0$ parallèle à un hyperplan fixe. Aux courbes (L) sur S correspondent sur S′ les sections faites par les hyperplans

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_{r'-1} X_{r'-1} + \alpha_{r'} = 0,$$

parallèles à l'axe $X_{r'}$, et aux courbes (P) correspondent les sections faites par l'hyperplan

$$\beta_1 X_{r'} + \beta_2 = 0,$$

parallèle à un hyperplan fixe. Quant à l'ordre de S′, il dépendra, en général, des fonctions P, mais, dans tous les cas, une variété linéaire d'ordre $r'-1$ parallèle à l'axe des $X_{r'}$ coupera S′ en D points. Si donc $D = 0$, la surface S′ devra se réduire à un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des $X_{r'}$.

La transformation précédente peut être modifiée. On conçoit, en effet, que, par une transformation homographique, on puisse faire en sorte que chaque point de S′ soit déterminé par l'intersection d'une droite, passant par un point fixe O, avec une variété linéaire ou hyperplan $\Sigma_{r'-1}$ passant par une variété linéaire fixe $\Sigma_{r'-2}$ dans l'espace $\Sigma_{r'}$ et ne passant pas par le point O. Dans ces conditions, aux courbes (L) de S correspondent sur S′ les sections

faites par des hyperplans passant par un point fixe O, et aux courbes (P) les sections faites par des hyperplans passant par la variété linéaire $\Sigma_{r'-2}$, et si $D = 0$, la surface S' se réduit à un cône de sommet O.

On peut imaginer bien d'autres transformations analogues aux précédentes, qui s'indiqueront d'elles-mêmes d'après la nature du problème à traiter. C'est ainsi que, au lieu d'un faisceau auxiliaire (P), on pourra être conduit à prendre un système auxiliaire d'un ordre plus élevé ; nous en verrons, à la fin de cette Section, un exemple dans lequel on effectuera une transformation en prenant simplement un faisceau de courbes (L) et un réseau arbitraire. Le but principal qu'on se propose est de substituer aux courbes (L) des courbes planes.

13. Démontrons maintenant un théorème important relatif aux systèmes linéaires. Soit un système linéaire pour lequel la courbe variable d'intersection ne se compose pas des courbes d'un faisceau, c'est-à-dire pour lequel, comme nous l'avons vu, on a $D > 0$. Nous allons établir que, dans cette hypothèse, *la courbe variable d'intersection est nécessairement irréductible*.

Supposons que le théorème soit inexact, et faisons avec trois polynomes L la transformation générale indiquée au numéro précédent. On prendra

$$X = \frac{L_1}{L_3}, \qquad Y = \frac{L_1}{L_3}, \qquad Z = \frac{P_1}{P_2}.$$

On aura alors, dans l'espace à trois dimensions, une surface S' dont toutes les sections planes parallèles à l'axe des Z seront formées de courbes réductibles, puisque ces sections correspondent à des courbes du système linéaire. Nous avons donc à étudier une surface algébrique irréductible, *telle que toutes ses sections planes, parallèles à une direction donnée,* ou, ce qui revient au même, par une transformation homographique, *telle que toutes ses sections planes correspondant à des plans passant par un certain point* O *sont des courbes réductibles*.

Prenons le point O comme origine, et considérons une droite arbitraire passant par O, que nous prendrons un moment comme

axe des z. Si

$$f(x, y, z) = 0$$

désigne l'équation de la surface, la courbe plane définie par l'équation entre x et z,

$$f(x, \lambda x, z) = 0,$$

doit, par hypothèse, être réductible, quel que soit le paramètre λ. Or, pour faire cette décomposition, il faudra résoudre une certaine équation d'un degré n,

$$\mu^n + A_1 \mu^{n-1} + \ldots + A_n = 0,$$

équation dont les coefficients A sont fonctions rationnelles de λ. A chacune des racines de cette équation correspondra une courbe composante, et les courbes composantes seront en nombre n pour λ arbitraire. Pour un nombre fini de valeurs de λ, l'équation auxiliaire aura une racine double, et, par suite, on aura un nombre fini de plans passant par Oz, et *tangents à la surface le long d'une ligne*. La droite Oz étant d'ailleurs une droite arbitraire passant par O, il y aura donc un système au moins simplement infini de plans touchant la surface S' suivant une ligne ; cette surface sera donc développable, et comme les plans tangents de ce système passent par un point fixe, ce sera un cône de sommet O. En revenant à la transformation initiale, on a un cylindre, et les courbes de S' correspondant au système linéaire sur S,

$$\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 = 0,$$

sont les génératrices de ce cylindre : deux courbes du système n'ont pas alors de points variables de rencontre, ce qui est contre l'hypothèse que la courbe variable d'intersection ne se compose pas des courbes d'un faisceau. *Le théorème est donc démontré.*

14. Terminons ces considérations relatives aux systèmes linéaires tracés sur une surface, en démontrant un théorème relatif aux systèmes linéaires irréductibles, ou à chacune des courbes du faisceau dans le cas où $D = 0$. Nous allons montrer que *cette courbe irréductible ne peut avoir, en dehors de certains points*

fixes (points bases du système), de points multiples qui n'appartiennent pas aux lignes multiples de la surface.

Supposons le contraire, et considérons un faisceau linéaire arbitraire de courbes du système (L). Par hypothèse, les courbes irréductibles de ce faisceau devraient posséder des points multiples variables décrivant une ligne C simple pour la surface S. Employons un mode de représentation analogue à celui employé au n° **12**, mais dans laquelle, au lieu d'un faisceau auxiliaire, nous prendrons un réseau auxiliaire que nous pouvons supposer toujours tel que le système simplement infini de courbes de ce réseau passant par un point de la ligne C ne contienne pas, comme conséquence, d'autres points de cette courbe. A la surface S correspondra alors une surface S' : sur cette surface la courbe C aura pour image une courbe simple C'; aux courbes du faisceau (L) correspondront des courbes planes intersections de S' avec des plans passant par une droite d, et, aux courbes du réseau correspondront des courbes planes intersections de S' avec des plans passant par un point. Par hypothèse, la surface S' serait telle que les sections planes passant par une droite auraient des points multiples variables en dehors des lignes multiples de la surface, sur une courbe simple C', ce qui est impossible.

En effet, un point arbitraire P de C', étant multiple pour une section plane déterminée sur S' par un plan passant par une droite d, a comme plan tangent le plan Pd. Mais la tangente au point P à C', qui n'est pas située dans ce plan, coupe ce plan ; donc le point P est au moins un point double pour S', ce qui est contraire à l'hypothèse.

IV. — Du second genre (*Curvengeschlecht*) des surfaces algébriques, et du degré du système canonique.

15. Nous avons vu comment la considération des intégrales doubles de première espèce conduisait au genre géométrique d'une surface (*Flächengeschlecht*), introduit par Clebsch dans la théorie des surfaces algébriques. M. Noether [1] a appelé l'attention

[1] NOETHER, *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde* (*Math. Annalen*, t. VIII, p. 520).



sur un second nombre, jouissant du même caractère d'invariance, et qu'il a appelé le *second genre* de la surface ou *Curvengeschlecht*. C'est de ce nombre que nous allons maintenant nous occuper.

Considérons le système linéaire formé par les adjointes d'ordre $m-4$; comme nous l'avons dit (page 189), on l'appelle le *système canonique,* et nous emploierons indifféremment cette expression pour désigner le système linéaire de surfaces ou celui des courbes correspondantes sur f. Ce système linéaire de surfaces rencontre, *en général,* la surface f suivant une courbe mobile irréductible l, les autres courbes de rencontre étant des lignes fixes parmi lesquelles se trouvent les courbes multiples de la surface. En nous plaçant dans ce cas général, nous pouvons alors parler du *genre* de cette ligne mobile irréductible, c'est le genre de cette courbe que M. Noether appelle le *second genre* ou *Curvengeschlecht* de la surface.

On voit bien aisément, par la considération des intégrales doubles de première espèce, *que ce nombre est un invariant,* c'est-à-dire est le même pour deux surfaces qui se correspondent par une transformation birationnelle, comme nous en avons considéré au n° 7. Reprenons les deux surfaces de ce numéro

$$f(x, y, z) = 0, \qquad F(X, Y, Z) = 0,$$

se correspondant birationnellement, et désignons par

$$\iint \frac{(\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \ldots + \alpha_{p_g} q_{p_g})\, dx\, dy}{f'_z}$$

l'intégrale double la plus générale de première espèce de la surface f, les α étant des constantes arbitraires et les q les polynomes adjoints d'ordre $m-4$. Si l'on fait la substitution

$$\begin{aligned} x &= R_1(X, Y, Z),\\ y &= R_2(X, Y, Z),\\ z &= R_3(X, Y, Z),\end{aligned}$$

cette intégrale double doit se transformer en une intégrale double de première espèce relative à la surface F, et qui est, par suite,

$$\iint \frac{(\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 + \ldots + \alpha_{p_g} Q_{p_g})\, dX\, dY}{F'_z}$$

les Q étant des polynomes adjoints d'ordre $M-4$ relatifs à la surface F que nous supposons de degré M. On aura donc une identité de la forme

$$\begin{aligned}&\alpha_1 q_1(x, y, z)+\ldots+\alpha_{p_g} q_{p_g}(x, y, z)\\&\quad=\rho(X, Y, Z)[\alpha_1 Q_1(X, Y, Z)+\ldots+\alpha_{p_g} Q_{p_g}(X, Y, Z)],\end{aligned}$$

ρ étant une fonction rationnelle de X, Y, Z, ne dépendant que de la transformation, et nullement des paramètres α; son expression est évidemment

$$\rho=\frac{f'_z}{F'_z}\frac{D(R_1, R_2)}{D(X, Y)},$$

et dans le déterminant fonctionnel on doit considérer z, R_1 et R_2 comme fonctions de X et Y. De là résulte évidemment que la courbe mobile l d'intersection de la surface adjointe d'ordre $m-4$

$$\alpha_1 q_1+\alpha_2 q_2+\ldots+\alpha_{p_g} q_{p_g}=0$$

avec f a pour correspondante, par la transformation, la courbe mobile L d'intersection de la surface adjointe d'ordre $M-4$

$$\alpha_1 Q_1+\alpha_2 Q_2+\ldots+\alpha_{p_g} Q_{p_g}=0,$$

avec la surface F. Les deux courbes l et L se correspondent ainsi point par point et, par suite, elles ont même genre; *le* second genre *est donc le même pour deux surfaces se correspondant point par point,* comme nous l'avons énoncé plus haut. Nous désignerons le second genre [1] par $p^{(1)}$.

16. Deux circonstances différentes peuvent se présenter relativement aux surfaces adjointes d'ordre $m-4$. La surface adjointe *générale* de cet ordre peut ne passer par aucun point fixe ou aucune courbe fixe de la surface en dehors de certains points multiples ou des courbes multiples de la surface. C'est ce qui arrive, peut-on dire, le plus souvent; ainsi, pour la surface générale d'ordre m, les adjointes d'ordre $m-4$, qui sont des surfaces

---

[1] On ne confondra pas cet invariant $p^{(1)}$ et l'invariant $p^{(2)}$ qui va être introduit dans un moment avec les deux nombres p_1 et p_2 antérieurement considérés et relatifs à la Géométrie de situation.

quelconques de cet ordre, ne passent nécessairement par aucun point fixe de la surface. Mais une autre circonstance peut se rencontrer; il peut arriver que *toutes* les adjointes d'ordre $m-4$ passent nécessairement par certains points simples de la surface ou par certaines courbes simples de la surface. Il y a dans cette circonstance, comme nous aurons bientôt l'occasion de le voir, une source de complications assez sérieuses pour la généralité des énoncés de certains théorèmes.

Donnons un exemple de l'une et l'autre des circonstances indiquées. Une surface du cinquième ordre peut avoir deux points triples; la droite D qui les joint appartient alors nécessairement à la surface. Les adjointes sont ici des plans passant par les deux points triples; elles passent par la droite D.

Considérons en second lieu, avec M. Enriques, une surface du cinquième ordre avec deux points doubles A et B qui soient des *tacnodes;* il est aisé de voir que cette circonstance est réalisable. La droite AB percera la surface en un autre point C; toutes les adjointes d'ordre *un* sont des plans passant par AB, elles passent donc par le point C, et nous avons ainsi un exemple d'une surface d'ordre m pour laquelle toutes les adjointes d'ordre $m-4$ passent par un même point simple de la surface.

17. On a supposé expressément, dans la définition de $p^{(1)}$, que la ligne mobile l d'intersection de la surface avec une adjointe d'ordre $m-4$ était une courbe irréductible. Dans l'hypothèse contraire, la définition de $p^{(1)}$ n'a aucun sens. D'après le théorème du n° **13**, si la courbe l n'est pas irréductible, elle se composera des courbes d'un faisceau, et le nombre de ces courbes sera au moins égal à

$$p_g-1.$$

M. Noether a établi que *ces courbes sont en général de genre un.* Il en sera certainement ainsi quand on ne se trouvera pas dans les circonstances spéciales signalées au numéro précédent; il peut y avoir exception pour ces cas particuliers. Nous ne sommes pas en mesure de donner maintenant la démonstration de ce théorème; nous la renverrons au Chapitre suivant comme application des diverses généralités que nous allons développer sur la théorie des courbes gauches.

Indiquons seulement un exemple particulier où la courbe l est réductible. Reprenons à cet effet les surfaces considérées au n° 9, en supposant que le genre p' de la courbe

$$F(\lambda', \mu') = 0$$

soit égal à l'unité. La partie variable de l'intersection de la surface avec le système canonique sera alors donnée par l'équation

$$\alpha_1 P_1(\lambda, \mu) + \ldots + \alpha_p P_p(\lambda, \mu) = 0,$$

équation qui, avec

$$f(\lambda, \mu) = 0,$$

donnera $2p - 2$ systèmes de valeurs (λ, μ). On aura donc, comme partie variable de l'intersection, un faisceau de

$$2p - 2$$

courbes du genre *un*.

18. Nous donnerons encore la définition d'un autre nombre invariant introduit par M. Noether dans la théorie des surfaces algébriques, en même temps que $p^{(1)}$. Ce nouvel invariant est le *degré* du système canonique, en entendant par degré d'un système linéaire, comme dans la Section précédente, le nombre des points de rencontre mobiles de deux courbes l. Désignons ce degré par $p^{(2)}$; les courbes l jouissant de la propriété d'invariance, il en est évidemment de même de leurs points de rencontre mobiles. Nous avons donc bien un nombre *invariant*, c'est-à-dire un nombre qui reste le même pour deux surfaces se correspondant point par point. Il est d'ailleurs bien entendu que $p^{(2)}$ n'a, comme $p^{(1)}$, de sens que si la ligne l, intersection mobile du système canonique avec la surface, est irréductible. Il faut aussi que p_g soit supérieur à l'unité; pour $p_g = 2$, on aura $p^{(2)} = 0$.

M. Noether a établi que l'on avait

$$p^{(2)} = p^{(1)} - 1,$$

de sorte que l'on n'a pas, en réalité, un nouvel invariant; cette conclusion suppose toutefois que l'on ne se trouve pas dans les cas spéciaux du n° 16 : on peut alors avoir simplement l'inégalité

$$p^{(2)} < p^{(1)} - 1.$$

Nous nous bornons ici à ces énoncés, qui seront justifiés dans le Chapitre suivant; mais, quitte à renvoyer à un Chapitre ultérieur la démonstration de quelques points particuliers, nous avons tenu à introduire ensemble dans ce Chapitre les trois nombres fondamentaux

$$p_g, \quad p^{(1)}, \quad p^{(2)},$$

particulièrement étudiés par M. Noether.

19. Terminons ce Chapitre par une remarque générale sur la transformation d'une surface f au moyen de ses surfaces adjointes d'ordre $m-4$. Plaçons-nous dans le cas général où le système canonique est un système linéaire *simple* (au sens de la Section précédente), et soit

$$p_g \geqq 4.$$

Prenons alors quatre polynomes adjoints quelconques d'ordre $m-4$

$$Q_1(x, y, z), \quad Q_2(x, y, z), \quad Q_3(x, y, z), \quad Q_4(x, y, z),$$

que nous assujettirons seulement à passer par $p_g - 4$ points pris arbitrairement sur la surface.

Nous pouvons nous servir de ces polynomes pour faire, comme au n° **12**, une transformation de la surface; on posera

$$X = \frac{Q_1}{Q_4}, \quad Y = \frac{Q_2}{Q_4}, \quad Z = \frac{Q_3}{Q_4}.$$

Nous aurons ainsi une surface F qui correspondra point par point à la surface f; son degré sera égal au degré du système linéaire

$$(L) \qquad \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 + \alpha_3 Q_3 + \alpha_4 Q_4 = 0,$$

c'est-à-dire à

$$M = p^{(2)} - p_g + 4.$$

On peut donc transformer birationnellement la surface f en une surface de degré M; c'est là un théorème tout à fait analogue à la proposition de la théorie des courbes algébriques, d'après laquelle une courbe plane de genre p peut (sauf le cas hyperelliptique) être transformée en une courbe de degré $p+1$.

Les sections planes de la surface F correspondent aux courbes du système linéaire (L); *elles seront donc de genre* $p^{(1)}$.

Pour indiquer un exemple, considérons une surface du septième degré avec une conique triple C et un point triple isolé A. Les adjointes du troisième degré, que nous avons à considérer, se composent des surfaces du troisième degré ayant C pour conique double et passant par le point A. Ces surfaces se décomposent nécessairement et sont formées du plan de la conique et d'une quadrique passant par C et par A; on aura donc

$$p_g = 4.$$

On a ici

$$p^{(2)} = 5,$$

comme on le voit, en considérant la conique intersection de deux quadriques passant par C. Elle a quatorze points de rencontre avec la surface; or, deux de ces points sont sur C, et chacun d'eux compte pour trois, un autre est en A et compte également pour trois; on aura donc seulement *cinq* points de rencontre mobiles. D'après ce qui a été dit ci-dessus, la surface considérée du septième ordre correspond point par point à une surface du cinquième ordre.

CHAPITRE VIII.

SUR LES COURBES GAUCHES ALGÉBRIQUES ET LA FORMULE SUSCEPTIBLE DE DONNER LE GENRE D'UNE SURFACE.

I. — Quelques formules relatives aux courbes gauches algébriques; surfaces adjointes à une courbe gauche.

1. Avant d'étudier les surfaces passant par une courbe gauche, nous avons besoin de rappeler quelques théorèmes et formules relatifs aux courbes gauches ([1]). Nous nous limiterons essentiellement aux parties qui nous seront utiles pour la théorie des surfaces algébriques.

Une courbe gauche algébrique C est dite d'ordre ou de degré m, si sa perspective prise d'un point arbitraire de l'espace sur un plan quelconque est une courbe algébrique d'ordre m. Si l'on suppose cette perspective faite parallèlement à l'axe des z, on aura évidemment pour tous les points de la courbe

$$f(x, y) = 0,$$
$$z = \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)},$$

f représentant une courbe plane irréductible d'ordre m, et φ et ψ étant des polynomes en x et y de degrés respectifs n et $n-1$, tels que la courbe $\varphi = 0$ passe par les points d'intersection de $f = 0$ et $\psi = 0$. Telle est la représentation employée par Cayley pour une courbe gauche. Les deux équations précédentes ne sont pas vérifiées seulement par la courbe, mais par un certain nombre

([1]) On trouvera dans la *Géométrie à trois dimensions*, de Salmon, la bibliographie des travaux de Cayley et de Salmon sur les courbes gauches algébriques. Deux Mémoires considérables sur ce sujet ont été publiés en 1882; ce sont les travaux d'Halphen (*Journal de l'École Polytechnique*, 1882) et de Noether (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1882).

de droites parallèles à Oz, qui correspondent aux solutions communes aux trois équations $f=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$.

Le fait que toute courbe gauche devient ainsi, par l'adjonction de lignes droites, l'intersection *complète* de deux surfaces, rend évidente cette propriété, souvent admise sans démonstration, qu'une courbe gauche de degré m rencontre en $m\mu$ points une surface d'ordre μ.

Au lieu de la représentation de Cayley on peut se servir d'une représentation paramétrique. Il est possible de faire correspondre uniformément les points d'une courbe gauche à ceux d'une courbe plane

$$\varphi(\xi, \eta)=0.$$

On aura alors pour un point arbitraire (x, y, z) de la courbe gauche

$$x = R_1(\xi, \eta),$$
$$y = R_2(\xi, \eta),$$
$$z = R_3(\xi, \eta),$$

les R étant rationnelles en (ξ, η). On peut supposer, en effectuant une transformation homographique arbitraire, que les trois fonctions rationnelles R ont les mêmes pôles sur la surface de Riemann définie par l'équation $\varphi=0$ et que ces pôles sont simples. Si μ est leur nombre, le degré de la courbe gauche sera égal à μ, comme on le voit de suite en cherchant l'intersection de la courbe avec un plan quelconque.

Ces généralités indiquées, nous allons considérer une courbe gauche C d'ordre m, n'ayant d'autres singularités qu'un certain nombre t de points triples à tangentes distinctes. Deux nombres jouent un rôle important dans l'étude des courbes gauches. Le premier est le nombre h des sécantes doubles de la courbe passant par un point arbitraire A de l'espace; dans ce nombre h ne figurent pas les droites passant par A et les points triples de la courbe; on appelle h le nombre des points doubles apparents de la courbe. Le second est le *rang* r de la courbe, c'est-à-dire le degré de la développable formée par les tangentes à la courbe gauche. Il est facile d'avoir l'expression de r à l'aide de m, h et t. Considérons, en effet, le cône ayant pour sommet A et pour directrice la courbe; la classe de ce cône sera égale à r, car, par une

droite arbitraire D passant par A, on peut mener autant de plans tangents à ce cône qu'il y a de tangentes à la courbe rencontrant D; on a donc, d'après la formule de Plücker relative à la classe,

$$r = m(m-1) - 2h - 6t,$$

puisqu'une section plane du cône est une courbe de degré m avec h points doubles et t points triples.

2. Considérons, en particulier, le cas où C est l'intersection complète de deux surfaces

$$f(x, y, z) = 0,$$
$$\varphi(x, y, z) = 0,$$

de degrés μ et ν. Nous nous plaçons d'ailleurs dans le cas le plus général correspondant aux hypothèses faites sur la nature de la courbe. Par suite, si C avait un point triple, les deux surfaces auraient chacune un point conique ordinaire en ce point, et il y aurait pour l'intersection de f et φ quatre branches de courbes passant par ce point; la courbe C ne serait pas alors l'intersection complète. Nous devons donc, dans cette hypothèse, considérer une courbe sans points triples. Pour calculer r et h, on peut procéder de diverses manières; commençons par le calcul de r. Soient

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z + f'_t = 0,$$
$$X\varphi'_x + Y\varphi'_y + Z\varphi'_z + \varphi'_t = 0$$

les équations d'une tangente à la courbe C intersection de f et φ. Nous avons à chercher le nombre de ces tangentes rencontrant une droite arbitraire

$$AX + BY + CZ + D = 0,$$
$$A'X + B'Y + C'Z + D' = 0.$$

On aura l'équation

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z & f'_t \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z & \varphi'_t \\ A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix} = 0:$$

cette équation est de degré $\mu+\nu-2$, et par suite

$$r=\mu\nu(\mu+\nu-2).$$

La formule, donnée plus haut pour r (en y faisant $t=0$),

$$r=m(m-1)-2h \qquad (m=\mu\nu),$$

donne alors

$$h=\frac{\mu\nu(\mu-1)(\nu-1)}{2}.$$

Il ne sera pas inutile de vérifier ce nombre par un calcul direct. Cherchons l'équation du cône ayant pour sommet un point (x', y', z') de la courbe et ayant celle-ci pour directrice; soit x, y, z un point quelconque de ce cône. La droite passant par les deux points (x, y, z, t) et (x', y', z', t'), a pour coordonnées d'un quelconque de ses points

$$x'+\lambda x, \quad y'+\lambda y, \quad z'+\lambda z, \quad t'+\lambda t.$$

On devra donc avoir pour une valeur de λ

$$f(x'+\lambda x, y'+\lambda y, z'+\lambda z, t'+\lambda t)=0,$$
$$\varphi(x'+\lambda x, y'+\lambda y, z'+\lambda z, t'+\lambda t)=0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\left(x\frac{\partial f}{\partial x'}+y\frac{\partial f}{\partial y'}+z\frac{\partial f}{\partial z'}+t\frac{\partial f}{\partial t'}\right)+\frac{\lambda}{1.2}\left(x\frac{\partial f}{\partial x'}+\ldots\right)^2+\ldots=0,$$
$$\left(x\frac{\partial \varphi}{\partial x'}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right)+\frac{\lambda}{1.2}\left(x\frac{\partial \varphi}{\partial x'}+\ldots\right)^2+\ldots=0.$$

En éliminant λ entre ces équations, on a une équation qui, on le vérifie aisément, est de degré

$$(\mu-1)(\nu-1)$$

en (x', y', z'). Donc, pour (x, y, z) donné arbitrairement dans l'espace, on aura

$$\mu\nu(\mu-1)(\nu-1)$$

valeurs de (x', y', z') correspondant à des points de C (qui est de degré $\mu\nu$), telles que la droite joignant (x, y, z) et (x', y', z')

rencontre la courbe en un second point. Par suite

$$h = \frac{\mu\nu(\mu - 1)(\nu - 1)}{2},$$

comme nous l'avions trouvé plus haut.

3. Supposons maintenant que la courbe C de degré m soit seulement l'intersection partielle de deux surfaces de degrés μ et ν; désignons par C′ la courbe complémentaire d'intersection dont m' désignera le degré : on a

$$m + m' = \mu\nu.$$

Si la courbe C a un point triple, la courbe C′ passera par ce point triple, qui sera pour elle un point simple dans les circonstances générales où nous nous plaçons. Revenons à la surface (1) considérée au numéro précédent. Les

$$m(\mu + \nu - 2)$$

points de rencontre de cette surface avec la courbe C se composent des points de rencontre de r tangentes de la courbe avec la droite arbitraire; mais, de plus, la surface (1) passe par les points de rencontre de C et de C′, puisqu'en ces points les deux surfaces f et φ sont tangentes et que, par suite, les dérivées premières de f et φ sont proportionnelles. Soit θ le nombre des points de rencontre de C et de C′ en dehors des points triples de C; d'autre part, la surface (1) passe par les t points triples de C et a ces points pour points doubles. On a donc

$$m(\mu + \nu - 2) = r + \theta + 6t,$$

formule qui va nous être utile dans un moment.

4. Nous pouvons maintenant définir les surfaces adjointes à une courbe gauche. Soit toujours la courbe gauche C, et considérons comme ci-dessus deux surfaces f et φ de degrés respectivement égaux à μ et ν passant par cette courbe gauche. Ces surfaces auront en commun une seconde courbe C′. Envisageons une surface Σ arbitraire de degré

$$\mu + \nu - 4,$$

passant par C′ et ayant comme points doubles les t points triples de C. Cherchons quel va être le nombre des points de rencontre de la surface Σ avec C, en dehors des t points triples et des θ autres points communs à C et à C′. Ce nombre sera égal à

$$m(\mu+\nu-4)-\theta-6t,$$

ou, d'après la formule du numéro précédent, à

$$m(\mu+\nu-4)-m(\mu+\nu-2)+r,$$

c'est-à-dire

$$r-2m.$$

Or, le rang de C est donné (n° 1) par

$$r=m(m-1)-2h-6t.$$

On aura donc pour le nombre cherché

$$m(m-3)-2h-6t=(m-1)(m-2)-2h-6t-2,$$

nombre qui est égal à

$$2p-2,$$

en désignant par p le genre de la courbe gauche de C, c'est-à-dire le genre de sa perspective sur un plan arbitraire et d'un point de vue arbitraire. *La surface* Σ *considérée rencontre donc la courbe* C *en* $2p-2$ *points en dehors des points communs à* C *et à* C′.

On donne aux surfaces Σ le nom de *surfaces adjointes à la courbe gauche* C; il y a, comme on voit, un très grand degré d'arbitraire dans leur définition, puisqu'on peut prendre arbitrairement les surfaces f et φ passant par C. Ces surfaces adjointes rappellent les courbes adjointes d'ordre $m-3$ dans la théorie des courbes algébriques par cette propriété remarquable d'avoir, en dehors de certains points assignables *a priori*, un nombre $2p-2$ de points de rencontre avec la courbe, en désignant par p le genre de la courbe [1].

---

[1] La notion de surface adjointe à une courbe gauche est due à M. Noether (*Math. Annalen*, t. VIII, p. 510). M. Noether ne démontre pas seulement qu'une surface arbitraire Σ passant par C′ rencontre C en $2p-2$ points; il établit de plus que ce groupe de $2p-2$ points sur la courbe C dépend de $p-1$ arbitraires. Nous n'aurons pas besoin, dans la suite, de ce dernier point, dont la démonstration est assez délicate.

Comme exemple, prenons le cas général où C serait l'intersection complète de deux surfaces f et φ d'ordre μ et ν; une surface arbitraire d'ordre $\mu+\nu-4$ est alors une surface adjointe de C. On a bien

$$2p-2=\mu\nu(\mu+\nu-4),$$

p étant le genre de la courbe C. On peut le vérifier, si l'on veut, avec les formules du n° 2, puisque

$$p=\frac{(\mu\nu-1)(\mu\nu-2)}{2}-\frac{\mu\nu(\mu-1)(\nu-1)}{2}.$$

5. On peut présenter d'une manière plus large la définition des surfaces adjointes à une courbe gauche en se plaçant dans le cas plus général où les deux surfaces f et φ auraient la courbe C′, ou, d'une manière plus générale, les courbes C′, si la courbe désignée par C′ se décompose, comme courbes multiples d'un degré quelconque de multiplicité. On doit supposer que la surface d'ordre $\mu+\nu-4$, passant par les courbes C′, se comporte d'une manière convenable aux points de rencontre α des courbes C′ avec C. On évitera toute difficulté en considérant la surface S

$$\text{(S)}\qquad\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ f'_x & f'_y & f'_z & f'_t \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z & \varphi'_t \end{vmatrix}=0,$$

déjà envisagée au n° 2. Cette surface S est de degré $\mu+\nu-2$, et elle se comporte d'une certaine manière aux points α, chacun de ces points comptant pour un nombre déterminé d'unités dans l'évaluation du nombre des points de rencontre de S avec C. Or, supposons maintenant que l'on considère une surface Σ, d'ordre $\mu+\nu-4$, passant par les points α, et se comportant, relativement à son intersection avec C en ces points α, comme la surface S. Une telle surface Σ aura, en dehors des α, un certain nombre de points de rencontre qu'il est facile d'évaluer. En effet, le nombre des points de rencontre de S avec C est, en dehors des points α, égal à r; par suite, en désignant par a la part des points α dans l'évaluation du nombre des points de rencontre de C avec S, on a

$$m(\mu+\nu-2)=r+a.$$

Pour la surface Σ, le nombre des points de rencontre en dehors des α sera

$$m(\mu+\nu-4)-a,$$

d'après l'hypothèse faite sur la manière dont Σ se comporte aux points α. On aura donc, pour le nombre cherché,

$$r-2m,$$

c'est-à-dire $2p-2$. Nous retombons donc sur le même résultat que plus haut, *en envisageant les surfaces adjointes à la courbe gauche sous un point de vue plus général.*

II. — Sur une relation entre les invariants $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$ d'une surface algébrique.

6. Nous ferons de suite une application de la notion des surfaces adjointes à une courbe gauche, en démontrant un résultat relatif aux invariants $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$ définis au Chapitre précédent. Nous considérons l'adjointe générale Q d'ordre $m-4$ d'une surface f de degré m, et nous nous plaçons dans le cas où la partie variable l de l'intersection de Q avec f est irréductible.

Supposons d'abord, comme il arrivera en général, que l'adjointe générale Q n'ait aucune partie fixe commune avec f en dehors des lignes multiples et des points multiples isolés de la surface. Si donc nous nous bornons au cas des singularités que nous appelons ordinaires, nous supposerons que la seule ligne commune à f et à toutes les surfaces du système canonique est la ligne double de la surface. Envisageons une ligne déterminée, d'ailleurs quelconque, l_0, intersection partielle de f avec une certaine adjointe Q_0. Les surfaces adjointes à la courbe l_0 sont d'ordre

$$m+m-4-4=2m-8.$$

Les points triples de la courbe double, si elle en a, ne présenteront aucune particularité, car la ligne l_0 ne passe pas en général par ces points. Les points α de rencontre de l_0 avec la courbe double devront compter pour deux dans l'évaluation du nombre des points de rencontre de l_0 avec ses surfaces adjointes; on vérifie en effet facilement que la surface (S) du n° 5 est tangente en

un point α à la nappe de la surface passant par ce point qui contient la ligne l_0. Ceci posé, parmi les surfaces adjointes à l_0 se trouvent les surfaces

$$(2) \qquad \Sigma A_{ik} Q_i Q_k = 0$$

(les A étant des constantes), Q_i et Q_k étant deux polynomes adjoints du système canonique. En particulier, la surface décomposable

$$Q_i Q_k = 0$$

peut jouer le rôle d'une surface adjointe à la ligne l_0. Le nombre des points de rencontre de cette surface avec l_0, en dehors de la courbe double, et, par conséquent, le nombre des points de rencontre variables avec les A de la surface (2) sera

$$2p^{(2)}$$

puisqu'il y a $p^{(2)}$ points pour chacune des surfaces Q_i et Q_k. Mais nous savons, d'autre part, d'après le numéro précédent, que ce nombre est égal à

$$2p^{(1)} - 2.$$

On a, par suite, la relation importante ([1])

$$p^{(2)} = p^{(1)} - 1.$$

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que toutes les adjointes Q ne passent pas par un même point simple ou n'ont pas en commun une même ligne simple λ de la surface. Prenons d'abord le premier de ces cas particuliers. Les points simples isolés communs à toutes les surfaces Q figureront parmi les

$$2p^{(1)} - 2$$

points de rencontre de l_0 avec une surface adjointe à cette courbe; ils ne seront pas compris, au contraire, parmi les

$$2p^{(2)}$$

points de rencontre (variables avec les A) de la surface (2) avec l_0.

([1]) Cette relation est due à M. Noether (*Math. Annalen*, t. VIII, p. 521); les cas d'exception qui vont être signalés ont été indiqués par MM. Castelnuovo et Enriques (*Math. Annalen*, t. XLVIII, p. 281).

On aura donc

$$2p^{(2)} < 2p^{(1)} - 2$$

et, par suite,

$$p^{(2)} < p^{(1)} - 1.$$

S'il y avait une ligne simple λ qui rencontrât l_0 en dehors de la ligne multiple, un point de rencontre β ne compterait pas parmi les $2p^{(1)} - 2$ points variables de rencontre de l_0 avec une de ses adjointes, et il compterait seulement pour *un* dans le nombre total des points de rencontre de l_0 avec cette dernière surface. Pour la surface (2), le point β compte pour *deux* dans le nombre total des points de rencontre de cette surface avec l_0. Par conséquent, les $2p^{(2)}$ points de rencontre variables de (2) avec l_0 sont en nombre inférieur à $2p^{(1)} - 2$, et *l'on retombe encore sur l'inégalité*

$$p^{(2)} < p^{(1)} - 1,$$

qui remplace l'égalité de Noether dans le cas particulier indiqué.

Un exemple de cette dernière circonstance nous sera fourni par la surface déjà considérée du cinquième degré possédant deux tacnodes (Chap. VII, n° 16). On a pour cette surface

$$p^{(1)} = 2,$$

puisque les adjointes d'ordre $m - 4$ sont ici des plans pivotant autour de la droite joignant les tacnodes, et que ces sections sont alors des courbes du cinquième degré ayant deux points doubles aux points où la courbe a un contact avec elle-même (points équivalents à deux points doubles ordinaires). On a, d'autre part, évidemment

$$p^{(2)} = 0,$$

et, par suite, on a l'inégalité ci-dessus et non l'égalité. Nous sommes dans le cas où il existe un point simple commun à toutes les adjointes Q; c'est le point où la droite joignant les tacnodes rencontre la surface.

Dans l'exemple donné (*loc. cit.*) d'une surface du cinquième degré avec deux points triples, on a

$$p^{(1)} = 1, \qquad p^{(2)} = 0,$$

et l'égalité est vérifiée; il y a bien ici une ligne λ (la droite joignant les deux points triples), mais la ligne l ne rencontre pas λ en dehors des points multiples.

Reprenons pareillement l'exemple également considéré antérieurement, d'une surface du septième ordre avec une conique triple et un point triple isolé. On avait alors

$$p^{(2)} = 5.$$

Il y a ici une droite simple par laquelle passent toutes les adjointes d'ordre *trois*, mais il est visible que les lignes l ne rencontrent pas cette droite : on aura donc

$$p^{(2)} = p^{(1)} - 1,$$

et, par suite,

$$p^{(1)} = 6.$$

7. Nous avons, dans le numéro précédent, considéré le cas où la courbe variable d'intersection l de la surface f avec le système canonique est irréductible. Voyons ce que l'on pourrait dire dans le cas où la ligne l serait décomposable. D'après un théorème général du Chapitre précédent (n° 13), nous savons que la ligne l se composera des courbes d'un faisceau, et ces courbes seront en nombre au moins égal à

$$p_g - 1.$$

On peut établir que, si nous ne sommes pas dans le cas exceptionnel visé plus haut où toutes les surfaces du système canonique passent par certains éléments simples de f, *toutes ces courbes sont de genre un*. Prenons une de ces courbes, soit C; on peut encore considérer comme surfaces adjointes à la courbe C la surface

$$(\alpha_i Q_i + \alpha_k Q_k) Q_k = 0;$$

mais cette surface n'a aucun point commun avec C puisque par un point simple de la surface ne passe qu'une courbe du faisceau. Le nombre $2p^{(1)} - 2$ se réduit donc à zéro, et l'on a

$$p^{(1)} = 1.$$

Quant au nombre des courbes C, il est au moins égal à $p_g - 1$; il peut lui être supérieur, comme le montre l'exemple du n° 17 du Chapitre précédent.

La conclusion $p^{(1)} = 1$ peut être inexacte, si l'on se trouve dans le cas exceptionnel. L'exemple, déjà plusieurs fois considéré d'une surface du cinquième degré avec deux tacnodes, suffit à le montrer. Nous avions alors $p_g = 2$ et, par suite, un faisceau linéaire; nous avons vu que l'on avait $p^{(1)} = 2$.

Il a été implicitement supposé, dans tout ce qui précède, que p_g était supérieur à *un*. Quand $p_g = 1$, on aura une seule adjointe

$$Q_1 = 0.$$

La courbe d'intersection l de Q_1 avec la surface, en dehors de la ligne double, étant supposée irréductible, il arrive, dans bien des cas, que cette courbe est unicursale. Mais l'exemple suivant, indiqué par M. Castelnuovo, montre que cette conclusion n'est pas nécessaire.

Considérons, en effet, une surface du cinquième ordre passant par une section conique, et ayant trois *tacnodes* A, B, C situés sur cette courbe. Cette surface n'a qu'une seule surface adjointe d'ordre $m - 4$, à savoir le plan ABC, puisque l'ordre des surfaces adjointes est ici égal à $5 - 4 = 1$, et qu'elles doivent passer par les trois points A, B, C. L'intersection du plan ABC avec la surface se compose de la section conique et d'une cubique passant par le point A, B, C, considérés comme simples, et cette dernière courbe, ayant un genre plus grand que zéro, n'est pas unicursale.

III. — Sur le nombre des conditions exprimant qu'une surface passe par une courbe gauche.

8. La recherche du nombre des conditions exprimant qu'une surface algébrique de degré donné passe par une courbe gauche donnée présente d'assez grandes difficultés. Commençons par démontrer un théorème qui fera connaître une limite supérieure pour ce nombre de conditions.

Reprenons, à cet effet, la représentation paramétrique indiquée au n° **1**. Nous aurons, pour la courbe gauche,

$$\varphi(\xi, \eta) = 0, \qquad \text{(d'un degré } \lambda \text{ et d'un genre } p),$$
$$x = R_1(\xi, \eta), \qquad y = R_2(\xi, \eta), \qquad z = R_3(\xi, \eta),$$

les R étant des fonctions rationnelles de (ξ, η) ayant d pôles

simples communs sur la surface de Riemann φ; la courbe gauche sera de genre p et de degré d.

Soit un polynome arbitraire $F(x, y, z)$ de degré m en x, y, z; substituons dans F à x, y, z les valeurs précédentes. L'expression

$$F(x, y, z),$$

devient alors une fonction rationnelle de (ξ, η) avec d pôles d'ordre m, ce qui équivaut à md pôles simples. Or le nombre des arbitraires figurant dans une fonction rationnelle ayant md pôles donnés est, d'après le théorème de Riemann-Roch,

$$md - p + \sigma + 1,$$

σ désignant le nombre des adjointes d'ordre $\lambda - 3$ passant par les md pôles. Par suite, si

$$md > 2p - 2,$$

σ sera nécessairement nul, et le nombre des arbitraires sera

$$h = md - p + 1.$$

L'expression F pourra alors se mettre sous la forme

$$\alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2 + \ldots + \alpha_h J_h,$$

les J étant des fonctions rationnelles déterminées de (ξ, η), les α dépendant des coefficients du polynome F : si l'on veut que la surface

$$F(x, y, z) = 0$$

passe par la courbe gauche, il faudra que

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \alpha_h = 0.$$

On aura donc un nombre de conditions égal à h, ou à un nombre moindre, s'il se trouvait que ces équations ne soient pas distinctes. Nous arrivons ainsi à la conclusion suivante :

Le nombre des conditions N_m, *exprimant qu'une surface de degré m passe par une courbe gauche de degré d et de genre p, est au plus égal à*

$$md - p + 1,$$

en supposant que l'on ait

$$md > 2p - 2.$$

9. Le théorème précédent ne donne qu'une limite supérieure. Dans des cas très étendus, cette limite supérieure représente le nombre véritable. Bornons-nous, pour le moment, au cas où la courbe gauche n'a aucun point multiple; on peut alors affirmer que

$$N_m = md - p + 1,$$

si, la courbe gauche étant donnée, le nombre m est pris suffisamment grand.

La démonstration de ce théorème est assez délicate. Nous allons d'abord examiner le cas particulier où la courbe serait l'intersection complète de deux surfaces

$$f = 0, \qquad \varphi = 0,$$

f étant de degré μ et φ de degré ν. Deux circonstances sont à examiner suivant que m est inférieur ou supérieur à $\mu + \nu$; soit d'abord

$$m = \mu + \nu - \delta.$$

D'après un théorème dont nous avons déjà plusieurs fois fait usage, toute surface passant par l'intersection de f et φ a son équation de la forme

$$uf + v\varphi = 0,$$

u étant de degré $\nu - \delta$, et v de degré $\mu - \delta$. Le nombre des arbitraires figurant dans l'équation de la surface est donc *au plus* égal à

$$A = \frac{(\mu - \delta + 1)(\mu - \delta + 2)(\mu - \delta + 3)}{6} + \frac{(\nu - \delta + 1)(\nu - \delta + 2)(\nu - \delta + 3)}{6} - 1.$$

Par suite le nombre N_m des conditions exprimant qu'une surface de degré m passe par la courbe est *au moins* égal à

$$\frac{(\mu + \nu - \delta + 1)(\mu + \nu - \delta + 2)(\mu + \nu - \delta + 3)}{6} - 1 - A,$$

et, en réduisant cette expression, on trouve

$$\frac{1}{2}\mu\nu(\mu + \nu - 2\delta + 4) + \frac{(\delta - 1)(\delta - 2)(\delta - 3}{6}.$$

Or il est facile d'évaluer le genre p de la courbe, puisque (n° 2) le nombre des points doubles apparents est égal à

$$\frac{1}{2}\mu\nu(\mu-1)(\nu-1).$$

D'autre part, comme on a $d=\mu\nu$, l'expression précédente devient

$$md-p+1+\frac{(\delta-1)(\delta-2)(\delta-3)}{6},$$

et nous trouvons ainsi

$$N_m \geqq md-p+1+\frac{(\delta-1)(\delta-2)(\delta-3)}{6}.$$

Supposons maintenant que m soit supérieur à $\mu+\nu$, soit

$$m=\mu+\nu+\delta.$$

Les surfaces, passant par la courbe, sont toujours de la forme

$$uf+v\varphi=0,$$

u étant de degré $\nu+\delta$, et v de degré $\mu+\delta$. Mais on peut remplacer u par $u+\omega\varphi$, et v par $v-\omega f$, le polynome ω étant de degré δ; le nombre des arbitraires figurant dans l'équation de la surface est alors *au plus*

$$A'=\frac{(\mu+\delta+1)(\mu+\delta+2)(\mu+\delta+3)}{6}$$
$$+\frac{(\nu+\delta+1)(\nu+\delta+2)(\nu+\delta+3)}{6}-1-\frac{(\delta+1)(\delta+2)(\delta+3)}{6},$$

et la différence

$$\text{(E)}\qquad \frac{(\mu+\nu+\delta+1)(\mu+\nu+\delta+2)(\mu+\nu+\delta+3)}{6}-1-A'$$

représente le minimum du nombre N_m cherché des conditions, pour qu'une surface de degré m passe par la courbe; cette expression se réduit ici à

$$md-p+1,$$

et l'on aura par suite

$$(2)\qquad N_m \geqq md-p+1.$$

Nous concluons de l'analyse précédente que l'inégalité (2) *a*

lieu pour les surfaces de degré supérieur à

$$\mu + \nu - 4.$$

Mais, d'autre part, nous savons, d'après le numéro précédent, que l'on a

$$(3) \qquad N_m \leqq md - p + 1,$$

dans le cas où

$$(4) \qquad md > 2p - 2.$$

Or, en posant $m = \mu + \nu + \delta$, l'inégalité précédente donne

$$\mu\nu(\mu + \nu + \delta) > (\mu\nu - 1)(\mu\nu - 2) - \mu\nu(\mu - 1)(\nu - 1) - 2,$$

qui se réduit à

$$\delta > -4.$$

Par conséquent, la condition (4) sera vérifiée pour les surfaces de degré supérieur à $\mu + \nu - 4$, et nous pouvons déduire des inégalités (2) et (3)

$$N_m = md - p + 1,$$

dans le cas où

$$m \geqq \mu + \nu - 3.$$

Le théorème énoncé est donc démontré pour le cas particulier considéré, et nous avons une limite du nombre m.

10. Examinons maintenant le cas où la courbe C n'est pas l'intersection complète de deux surfaces, et supposons qu'on puisse faire passer, par la courbe C, deux surfaces de degré μ et ν, l'intersection de ces surfaces se complétant par une courbe irréductible C' sans point singulier, dont nous désignerons le degré par d'. Envisageons une surface arbitraire Σ, passant par C, et de degré m *supérieur à* $\mu + \nu - 4$. Une telle surface coupe C', en dehors des θ points communs à C et à C', en un nombre de points égal à

$$d'[m - (\mu + \nu - 4)] + 2p' - 2,$$

comme il résulte de suite des considérations présentées au n° 5. Les surfaces Σ déterminent donc sur C' un groupe linéaire de points dont le nombre est égal à l'expression précédente, et ce

groupe de points dépend, d'après un corollaire du théorème de Riemann-Roch [1], au plus de

$$d'[m-(\mu+\nu-4)]+p'-2$$

constantes arbitraires. Le nombre des conditions pour qu'une surface Σ, passant par C, passe aussi par C' sera donc au plus égal à

$$d'[m-(\mu+\nu-4)]+p'-1,$$

car, si l'on fait passer la surface Σ par des points arbitraires de C' en nombre égal à ce dernier nombre, la surface devra contenir C' puisque le groupe des points de rencontre dépend d'une arbitraire de moins.

Ceci posé, le nombre des conditions pour qu'une surface Σ, de degré m, passe par C est

$$md-p+1-\varepsilon \qquad (\varepsilon \geqq 0);$$

(1) Le corollaire du théorème de Riemann-Roch dont nous nous servons ici est le suivant. Soit considéré sur une courbe C un groupe linéaire de points variables en nombre μ ($\mu > 2p-2$); l'ordre de ce groupe, c'est-à-dire le nombre des points qui peuvent être pris arbitrairement dans un groupe, est au plus égal à $\mu-p$. On peut d'ailleurs démontrer directement ce résultat en le rattachant au théorème d'Abel. Supposons, en effet, que l'ordre du groupe soit supérieur à $\mu-p$, par exemple soit égal à $\mu-p+1$; prenons sur la courbe p points arbitraires $A_1, A_2, \ldots, A_p$. Par ces points on peut faire passer au moins une courbe du système linéaire, puisque

$$p \leqq \mu-p+1;$$

cette courbe rencontrera C en un certain nombre de points B (en dehors des points bases du système linéaire) égal à $\mu-p$, et comme

$$\mu-p<\mu-p+1,$$

on pourra, par les points B, faire passer une courbe du système linéaire dépendant d'au moins un paramètre. Appliquons alors aux p points de rencontre variables de cette courbe avec la courbe C le théorème d'Abel; nous aurons, en appelant ces points $(x_1, y_1), \ldots, (x_p, y_p)$,

$$Q_i(x_1, y_1)\,dx_1+\ldots+Q_i(x_p, y_p)\,dx_p=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, p),$$

les Q étant les adjointes relatives aux intégrales de première espèce. Mais des égalités précédentes on conclut que le déterminant

$$|Q_i(x_h, y_h)| \qquad (i, h=1, 2, \ldots, p)$$

est nul, ce qui est absurde puisqu'une position particulière des p points coïncide avec les A pris arbitrairement au début.

d'autre part, le nombre des conditions pour qu'une surface de degré m, passant déjà par C, passe par C' est, comme nous venons de le voir,

$$d'[m-(\mu+\nu-4)]+p'-1-\varepsilon', \qquad (\varepsilon' \geqq 0).$$

On suppose d'ailleurs que l'on a les deux inégalités

$$md > 2p-2, \qquad m > \mu+\nu-4.$$

Le nombre des conditions pour qu'une surface de degré m passe par C et C' est donc représenté par l'expression

$$(5) \qquad md-p+1+d'[m-(\mu+\nu-4)]+p'-1-\varepsilon-\varepsilon'.$$

Mais nous savons (n° 9) que le nombre des conditions pour qu'une surface de degré m passe par l'intersection de deux surfaces de degrés respectifs μ et ν a pour minimum l'expression E du numéro précédent : ce nombre est, par suite, égal à

$$(6) \qquad \mu\nu m - \frac{\mu\nu(\mu+\nu-4)}{2}+\eta, \qquad (\eta \geqq 0).$$

Nous devons donc égaler (5) et (6), ce qui donne, en se rappelant que $d+d'=\mu\nu$,

$$(7) \qquad \frac{\mu\nu(\mu+\nu-4)}{2}-d'(\mu+\nu-4)+p'-p=\varepsilon+\varepsilon'+\eta.$$

Or il est facile d'avoir la valeur du premier membre; si r' et h désignent le rang de la courbe C' et le nombre de ses points doubles apparents, comme r et h désignent les mêmes nombres pour la courbe C, on a

$$r=d(d-1)-2h, \qquad r'=d'(d'-1)-2h',$$

ou

$$r=2(d-1)+2p, \qquad r'=2(d'-1)+2p';$$

donc

$$r-r'=2(d-d')+2(p-p').$$

Mais des égalités obtenues au n° 3,

$$d(\mu+\nu-2)=r+\theta,$$
$$d'(\mu+\nu-2)=r'+\theta,$$

on déduit

$$r-r'=(d-d')(\mu+\nu-2);$$

donc

$$2(p-p')=(d-d')(\mu+\nu-4),$$

et le premier membre de l'équation (7) se réduit à

$$\frac{\mu\nu(\mu+\nu-4)}{2}-d'(\mu+\nu-4)-\frac{(d-d')(\mu+\nu-4)}{2},$$

c'est-à-dire à *zéro*. On a, par suite,

$$\varepsilon+\varepsilon'+\eta=0,$$

d'où nous concluons enfin

$$\varepsilon=\varepsilon'=\eta=0,$$

puisque ces trois quantités sont positives. *Le nombre des conditions pour qu'une surface Σ de degré m passe par la courbe considérée C est donc représenté exactement par*

$$md-p+1.$$

On suppose, bien entendu, remplies les conditions du commencement de ce numéro, c'est-à-dire que C est une partie de l'intersection de deux surfaces de degré μ et ν, cette intersection se complétant par une courbe *irréductible* C', et de plus m satisfait aux deux inégalités

$$md>2p-2, \qquad m>\mu+\nu-4.$$

Nous voyons donc que, *pour m suffisamment grand, on a exactement le nombre cherché de conditions* (¹).

11. Nous allons indiquer une autre méthode pour établir le théorème précédent; elle donnera, dans bien des cas, une limite de m supérieure à celle que nous venons de trouver, mais elle a l'avantage d'être plus rapide. Nous l'empruntons à un Mémoire de M. Castelnuovo (²).

(¹) M. Noether énonce et démontre rapidement le résultat précédent à la p. 46 de son Mémoire cité plus haut sur les courbes gauches (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1882); quelques points de la démonstration nous ayant paru avoir besoin de développements, nous avons suivi une tout autre voie.

(²) G. Castelnuovo, *Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebricha* (*Rendiconti del circolo mathematico di Palermo*, 1893).

Prenons un point de vue arbitraire et projetons la courbe gauche C sur un plan quelconque; la perspective sera une courbe Γ ayant h points doubles correspondant aux couples de points (a_1, a_2), (b_1, b_2), ..., de la courbe C. Considérons les adjointes d'ordre k à Γ, c'est-à-dire les courbes d'ordre k passant par les h points doubles $(k \geqq d-2)$; ces adjointes rencontrent, en dehors des points doubles, la courbe Γ en

$$kd-2h$$

points variables, et l'on sait que l'*ordre* de ce groupe de points est égal à

$$kd-2h-p,$$

c'est-à-dire que, parmi les $kd-2h$ points, on peut en prendre arbitrairement $kd-2h-p$, les p autres étant déterminés par ceux-ci. On a alors un ensemble correspondant de cônes d'ordre k ayant pour sommet le centre de projection, et pour directrices les adjointes d'ordre k à Γ.

Considérons, d'autre part, l'intersection de la courbe avec une surface quelconque d'ordre $k (k \geqq d-2)$ passant par les $2h$ points (a_1, a_2), (b_1, b_2), ... Nous aurons $kd-2h$ points en dehors des points fixes.

Cet ensemble de points dépend d'au moins

$$kd-2h-p$$

arbitraires, puisque les cônes considérés ci-dessus font partie des surfaces qui nous occupent; d'autre part, le nombre des arbitraires, dans l'ensemble de points, ne peut pas dépendre de plus de $kd-2h-p$ arbitraires, d'après la remarque dont nous avons déjà fait usage au n° 10 (*voir* la note).

Ainsi donc le groupe de points variables, détachés sur la courbe C par toutes les surfaces passant par les points (a_1, a_2), (b_1, b_2), ..., dépend exactement de $kd-2h-p$ arbitraires, c'est-à-dire que $kd-2h-p$ de ces points peuvent être pris arbitrairement, la position des autres en résultant.

Nous allons déduire de là le nombre de constantes arbitraires dont dépend réellement le groupe de points détaché sur la courbe C par l'ensemble des surfaces d'ordre k. Montrons que ce

nombre est égal à $kd-p$. Il suffit, pour cela, de montrer que le nombre des conditions pour qu'une surface passe par (a_1, a_2), (b_1, b_2), ... est précisément égal à $2h$ et ne lui est pas inférieur ; nous n'aurons donc qu'à ajouter $2h$ au nombre des conditions déjà trouvé $kd-2h-p$ et nous trouverons ainsi $kd-p$. Il en résultera que le groupe des points de rencontre de C avec une surface d'ordre k dépend d'au moins $kd-p$ arbitraires, et, comme il ne peut lui être supérieur, la proposition sera établie. Or, il est aisé de voir que les $2h$ points

$$(a_1, a_2), \quad (b_1, b_2), \quad \ldots$$

sont bien indépendants les uns des autres au point de vue du nombre des conditions imposées à une surface d'ordre k passant par ces points ; en effet, dans le cas contraire, une surface d'ordre k passant par $2h-1$ de ces points passerait nécessairement par le dernier. Mais cela n'est pas possible, car on peut avoir, par exemple, une surface d'ordre k passant par a_2, b_1, b_2, ... et ne passant pas par a_1. Pour le montrer, prenons un cône ayant pour sommet le point projetant considéré plus haut, et pour directrice une adjointe d'ordre $k-1$ (qui est au moins égal à $d-3$). Ce cône peut passer par b_1, b_2, ... et ne pas passer par a_2, car on sait, d'après la théorie des courbes planes, qu'une courbe d'ordre supérieur ou égal à $d-3$ peut passer par certains points doubles de la courbe sans passer par les autres. A la surface conique précédente adjoignons un plan quelconque passant par a_2, on aura une surface cherchée passant par tous les points $(a, b, \ldots)$, sauf par le point a_1.

En résumé, nous pouvons affirmer que *le groupe des points de rencontre de la courbe* C *avec une surface d'ordre k dépend exactement de kd — p arbitraires*. Ces raisonnements supposent

$$k \geqq d-2.$$

Il résulte du théorème précédent qu'une surface d'ordre k, assujettie à passer par

$$kd-p+1$$

points choisis arbitrairement sur C, contient nécessairement la courbe. Ainsi se trouve établi le théorème que nous avions en

vue : *le nombre des conditions exprimant qu'une surface d'ordre* $k (k \geqq d - 2)$ *passe par la courbe* C *est égal à*

$$kd - p + 1.$$

12. Nous avons supposé que la courbe gauche C n'avait pas de points singuliers; il est intéressant, pour l'application à la théorie des surfaces, de considérer le cas où la courbe gauche C aurait un certain nombre t de points triples $A_1, A_2, \ldots, A_t$. Considérons toutes les surfaces d'ordre $k (k \geqq d - 2)$ passant par les points triples et rencontrant C en *six* points confondus en chacun des points triples. On va voir facilement, en faisant usage d'un mode de raisonnement analogue à celui qui a été employé plus haut, que le groupe des

$$kd - 6t$$

points variables est d'ordre

$$kd - 6t - p.$$

En effet, parmi les surfaces remplissant la condition précédente se trouvent les cônes ayant pour sommet un point pris comme point de vue et pour bases les adjointes d'ordre k à la courbe Γ projection de C sur un certain plan. En désignant par h le nombre des points doubles apparents, on aura alors sur Γ un groupe de points en nombre

$$kd - 2h - 6t,$$

dont l'ordre sera

$$kd - 2h - 6t - p.$$

Or, les $2h$ points $(a_1, a_2), (b_1, b_2), \ldots$ sont indépendants les uns des autres au point de vue du nombre des conditions imposées à une surface d'ordre k les contenant (on le verrait par un raisonnement analogue à celui du numéro précédent); il en résulte que les surfaces d'ordre k ayant *six* points de rencontre confondus avec chacun des points triples A, comme il arrive aux cônes qui viennent d'être considérés, détachent sur C un groupe de points en nombre

$$kd - 6t,$$

dépendant exactement de

$$kd - 6t - p$$

arbitraires. Or, soit μ le nombre des conditions exprimant qu'une surface de degré k rencontre la courbe C en six points confondus en chacun des points triples, le nombre des conditions pour qu'une surface de degré k passe par la courbe sera

$$\mu + kd - 6t - p + 1$$

puisque, avec ce nombre de conditions, nous exprimons qu'une surface d'ordre k, rencontrant la courbe aux points triples de la manière indiquée, rencontre la courbe en

$$kd - 6t - p + 1$$

points arbitrairement pris sur elle, ce qui est impossible.

La question proposée revient donc à évaluer μ; à cet effet, on peut, par exemple, écrire que la surface doit passer par un point A et être tangente, en ce point, à chacune des branches de la courbe C passant en A. On a ainsi, pour chaque point triple, *quatre* conditions, *si les trois tangentes à* C *au point* A *ne sont pas dans un même plan.* D'autre part, les quatre conditions imposées en chacun des points singuliers $A_1, A_2, \ldots, A_t$ sont *certainement indépendantes,* car le fait, pour une surface d'ordre $k (k \geqq d - 2)$, de rencontrer C en un certain nombre de points triples A, soit qu'elle n'ait de contact avec aucune branche, soit qu'elle ait un contact avec quelqu'une des branches passant en ces points, n'entraîne nullement comme conséquence que la surface ait en ces points un contact plus intime que celui qui résulte des conditions écrites, ou qu'elle passe par un autre des points triples. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que, pour les courbes d'ordre k, dans le plan de Γ, les conditions relatives aux nombres des points de rencontre confondus en un point triple sont indépendantes.

Nous pouvons donc écrire

$$\mu = 4t,$$

et nous avons, par suite, *pour le nombre cherché des conditions exprimant qu'une surface d'ordre $k (k \geqq d - 2)$ passe par* C,

$$kd - 2t - p + 1.$$

Il est clair que cette formule pourra souvent être exacte quand k sera inférieur à $d-2$, et, en employant des considérations analogues à celle du n° 10, on aura, dans bien des cas, une limite beaucoup moindre ; mais il est inutile d'insister : le point que nous avons surtout en vue est que la formule précédente est applicable *à partir d'une valeur suffisamment grande de k*.

IV. — Expression numérique de p_g ; du genre numérique d'une surface.

13. De même que, dans la théorie des courbes planes, on exprime le genre de la courbe par une formule où figurent le nombre des singularités, supposées ordinaires, de la courbe (points doubles ou points multiples d'ordre quelconque à tangentes distinctes), on peut chercher à trouver une formule numérique donnant le genre géométrique p_g d'une surface.

Comme il est bien connu, en désignant par k_i le nombre des points multiples d'ordre i, on a, pour une courbe d'ordre m,

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \sum_i k_i \frac{i(i-1)}{2}.$$

La diminution du genre due aux singularités, par rapport au genre $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ d'une courbe sans points singuliers, se trouve représentée par le terme soustractif

$$\sum k_i \frac{i(i-1)}{2}.$$

Considérons maintenant une surface de degré m sans singularités : son genre géométrique égal à

$$\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6}.$$

Si la surface a des singularités, le genre p_g peut se trouver diminué; nous écrirons

$$p_g = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6} - \varepsilon,$$

ε étant la diminution provenant de l'*ensemble* des singularités.

Mais ici *des circonstances peuvent se présenter, qui ne se rencontraient pas dans la théorie des courbes.*

14. Nous prendrons d'abord un cas particulier extrêmement simple ; nous avons dit que la présence d'un point multiple isolé d'ordre q irréductible entraîne, en général, pour la surface du système canonique, un nombre de conditions égal à

$$\frac{q(q-1)(q-2)}{6}.$$

Donc, pour une surface d'ordre m, avec un point multiple isolé d'ordre q, on aura

$$p_g = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6} - \frac{q(q-1)(q-2)}{6}.$$

Appliquons cette formule au cas d'un cône d'ordre m, sans ligne double ; nous avons $q = m$, et la formule donne

$$p_g = -\frac{(m-1)(m-2)}{2}.$$

Nous arrivons donc à ce résultat, que p_g est *négatif.* Nous avons ainsi un exemple où la formule donne pour p_g un nombre négatif, tandis qu'il est clair que p_g, d'après la définition même, est un nombre positif ou nul, et l'on a ici $p_g = 0$.

Cette circonstance n'est pas la seule qui puisse se présenter. On pourra avoir, dans d'autres cas, une formule fournissant, en général, la valeur de p_g, mais donnant, dans certains exemples, une valeur différente et inférieure à p_g, tout en étant positive. Il pourra notamment arriver, les singularités se composant de diverses courbes multiples ou de divers points multiples isolés, que la diminution totale ε dans la valeur de p_g ne soit pas la somme des diminutions partielles provenant des diverses singularités partielles. C'est là un fait qui ne se présente jamais dans la théorie des courbes, où, dans la diminution du genre, *chaque point singulier agit comme s'il était seul,* comme le montre le terme soustractif

$$\sum k_i \frac{i(i-1)}{2}$$

dans la formule rappelée plus haut relative aux courbes planes.

Prenons, pour vérifier cette assertion, le cas particulier suivant (¹). Considérons les trois quadriques quelconques

$$u(x, y, z) = 0, \qquad v(x, y, z) = 0, \qquad w(x, y, z) = 0.$$

Elles ont *huit* points communs $A_1, A_2, \ldots, A_8$. En désignant par φ_n une forme homogène arbitraire de degré n en u, v, w, formons l'équation

$$\varphi_n(u, v, w) = 0.$$

Elle représentera une surface d'ordre $2n$, ayant comme points singuliers isolés les points A qui sont des points multiples d'ordre n, ne présentant d'ailleurs aucune particularité. Un point multiple isolé général d'ordre n diminue, s'il est seul, le genre géométrique d'une surface de

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

unités. Donc ici, si dans la diminution du genre géométrique, chaque point A *agissait comme s'il était seul,* on aurait pour le genre de la surface

$$\frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{6} - 8\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = n-1.$$

Le genre géométrique de la surface considérée serait donc $n-1$. Mais on voit aisément que ce résultat est inexact; les polynomes adjoints Q d'ordre $2n-4$, dont le nombre donne p_g, satisfont à la seule condition que la surface

$$Q = 0$$

ait les points A comme points multiples d'ordre $n-2$. Or, la surface d'ordre $2n-4$

$$f_{n-2}(u, v, w) = 0,$$

où f_{n-2} est un polynome arbitraire de degré $n-2$, homogène en

---

(¹) Cet exemple est emprunté à un Mémoire de M. Castelnuovo, *Osservazioni intorno alla Geometria sopra una superficie* (*Rendic. Istituto Lombardo*, 1891).

u, v, w, remplit ces conditions, et elle dépend de

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

paramètres; on a, par suite,

$$p_g \geqq \frac{n(n-1)}{2},$$

résultat bien différent de la formule trouvée plus haut, qui donnait $p_g = n - 1$. Ainsi on voit, par cet exemple, que les conditions imposées aux adjointes du système canonique par les diverses singularités peuvent ne pas être indépendantes, et, *par suite, la formule qui, dans d'autres cas, aurait donné exactement p_g, donne une valeur moindre.*

15. Dans l'exemple du numéro précédent, nous avions seulement des points singuliers isolés. Pour donner un exemple dans lequel se trouvent des lignes singulières, prenons une intéressante surface du sixième ordre étudiée par M. Noether ([1]). C'est une surface du sixième ordre ayant pour courbes doubles une courbe gauche C du quatrième ordre de genre *un*, et une droite D qui ne la rencontre pas. Nous formerons facilement, dans un moment, l'équation d'une telle surface; il est clair que l'on a pour cette surface

$$p_g = 0,$$

car il ne peut y avoir de quadrique passant par C et D, puisque D ne rencontre pas C. D'autre part, voyons ce que nous trouverions pour p_g en retranchant de

$$\frac{(6-1)(6-2)(6-3)}{6} \quad \text{ou} \quad 10$$

le nombre des conditions exprimant qu'une quadrique passe par C, augmenté du nombre des conditions exprimant qu'une quadrique passe par D; cette somme est égale (d'après la formule $kd - p + 1$) à

$$8 + 3 \quad \text{ou} \quad 11:$$

([1]) Noether, *Ueber eine Fläche 6ter Ordnung vom Flächengeschlecht* -1 (*Math. Annalen*, 1883).

nous trouverions donc pour le genre

$$10 - 11 \quad \text{ou} \quad -1.$$

Voici donc encore un exemple, à rapprocher de celui du cône d'ordre m, où la formule fournit pour le genre un nombre négatif. Indiquons maintenant la forme de l'équation de la surface.

Soient

$$A = 0, \qquad B = 0$$

les équations de deux plans donnant la droite D, et

$$\varphi = 0, \qquad \psi = 0$$

les équations des deux quadriques dont l'intersection donne C. La surface du sixième degré, qui aura pour courbes doubles C et D, a pour équation

$$\begin{aligned}(a_0 A^2 + a_1 AB + A_2 B^2)\varphi^2 \\ + (b_0 A^2 + b_1 AB + b_2 B^2)\varphi\psi + (c_0 A^2 + c_1 AB + c_2 B^2)\psi^2 = 0,\end{aligned}$$

les a, b, c étant des constantes. On peut démontrer que cette surface correspond point par point à un cône du troisième ordre sans droite double.

16. Les exemples précédents montrent que l'on ne peut s'attendre à trouver une formule numérique qui donne, *dans tous les cas,* le genre géométrique p_g d'une surface algébrique. Après les cas particuliers que nous venons de traiter, revenons au cas général d'une surface ayant comme singularités une ligne double C, dont nous désignerons le degré par d et le genre par p, cette ligne double ayant t points triples qui sont aussi des points triples pour la surface. Le genre p_g de la surface est égal au nombre

$$\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6},$$

diminué du nombre des conditions qui exprime qu'une surface de degré $m-4$ passe par la courbe C. Or nous avons cherché, dans la section précédente, le nombre exact des conditions exprimant qu'une surface de degré k passe par une courbe C; nous avons trouvé, pour représenter ce nombre de conditions, l'expression

$$(\alpha) \qquad kd - 2t - p + 1,$$

pourvu que k dépasse une certaine limite; dans le cas contraire, l'expression précédente n'est qu'un maximum pour le nombre des conditions. Par suite, si $k = m - 4$ est assez grand pour que l'on puisse avoir, par la formule ci-dessus, le nombre exact des conditions pour qu'une surface de degré $m - 4$ passe par la courbe double, on aura

$$p_g = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6} - (m-4)d + 2t + p - 1.$$

Si, au contraire, il n'était pas légitime de se servir de l'expression (α) pour $k = m - 4$, le second membre de l'égalité précédente ne représenterait pas p_g, mais *un nombre plus petit;* nous poserons, dans tous les cas,

$$p_n = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6} - (m-4)d + 2t + p - 1:$$

on appelle p_n le *genre numérique de la surface,* et l'on a nécessairement, d'après ce qui précède,

$$p_n \leqq p_g.$$

Tandis que p_g est essentiellement positif (ou nul), le nombre p_n peut avoir un signe quelconque.

17. C'est M. Cayley [1] qui a remarqué le premier que la formule, trouvée pour p_g, en se servant sans précaution de l'expression (α), pouvait donner un nombre négatif [2]. Cet exemple, très général, est celui des surfaces réglées algébriques quelconques. Avant de l'indiquer, reprenons l'expression de p_n en introduisant, au lieu du genre p, le rang r de la courbe double C. On a, comme nous l'avons vu,

$$r = d(d-1) - 2h - 6t;$$

et d'autre part,

$$p = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - h - 3t.$$

---

[1] A. Cayley, *On the Deficiency of certain surfaces* (*Math. Annalen,* t. III, 1871).

[2] Nous avons vu plus haut qu'un cône suffit pour fournir un exemple de surfaces à genre négatif.

On en déduit pour p_n

$$p_n = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6} - (m-3)d + \frac{r}{2} + 2t.$$

Ceci posé, si l'on considère une surface réglée algébrique générale, elle a une courbe double, et sur cette courbe double un certain nombre de points triples. Dans un Mémoire sur les surfaces réglées algébriques, Salmon a montré que l'on avait entre le degré d, le rang r et le nombre t des points triples de cette courbe double, les relations

$$3t = (m-4)[3d - m(m-2)],$$
$$r = m(m-2)(m-5) - 2(m-6)d.$$

En se servant des formules de Salmon, on trouve, pour p_n

$$p_n = -\frac{(m-1)(m-2)}{2} + d.$$

On voit que p_n ainsi obtenu est négatif, et égal au genre, pris avec le signe *moins*, d'une section plane quelconque de la surface.

18. La considération du genre numérique d'une surface, quand il ne coïncide pas avec le genre géométrique, n'offrirait que peu d'intérêt si *ce genre numérique n'était pas, comme* p_g, *un nombre invariant*. Or, il résulte des remarquables recherches de M. Zeuthen ([1]), que p_n est un invariant; pour énoncer avec précision le beau théorème de M. Zeuthen, nous devons ici nous borner à considérer deux surfaces f et f' se correspondant point par point et n'ayant que les singularités ordinaires. Si m, p, d, t d'une part, et m', p', d', t' d'autre part, représentent les nombres relatifs aux surfaces f et f', on peut établir que

$$\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6} - (m-4)d + 2t + p - 1$$
$$= \frac{(m'-1)(m'-2)(m'-3)}{6} - (m'-4)d' + 2t' + p' - 1,$$

([1]) Zeuthen, *Études géométriques de quelques-unes des propriétés de deux surfaces dont les points se correspondent un à un* (*Math. Annalen*, t. IV).

c'est-à-dire que

$$p_n = p'_n,$$

résultat qui est évident si p_n et p'_n sont respectivement égaux à p_g et p'_g, mais qui, dans les autres cas, exige une démonstration spéciale. La démonstration de M. Zeuthen, comme celle de M. Noether ([1]), qui a repris la question après l'éminent géomètre danois, sont fort longues. Nous ne les suivrons pas dans cette voie. Dans des travaux récents ([2]), M. Enriques a étudié à un point de vue nouveau, extrêmement fécond, le genre numérique d'une surface ; ses belles recherches trouveront place dans le Tome II de cet Ouvrage.

Le fait que l'on n'a pas toujours $p_n = p_g$ introduit dans la théorie des surfaces un élément de classification qui n'avait pas son analogue dans la théorie des courbes. Un premier type de surfaces, le type général, correspond aux surfaces pour lesquelles

$$p_n = p_g.$$

La surface, dans ce cas, est dite *régulière ;* on appellera *irrégulière* une surface pour laquelle

$$p_n < p_g.$$

19. Après avoir indiqué la formule susceptible (au moins dans certains cas) de donner p_g, indiquons les formules susceptibles de donner $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$. Nous nous plaçons dans le cas général où ne se présente pas la circonstance spéciale indiquée au n° 6 et où l'on a, par suite,

$$p^{(2)} = p^{(1)} - 1.$$

Il suffira de calculer l'un de ces deux invariants ; c'est $p^{(2)}$ que nous allons obtenir le plus rapidement. Nous supposons que $p_g \geqq 2$, et nous considérons deux adjointes distinctes du système canonique ; elles ont en commun, en dehors de la courbe double C, une courbe Γ qui coupe C aux t points triples, et, en outre, en θ

([1]) Noether (*Math. Annalen,* t. VIII ; Mémoire déjà cité).

([2]) Enriques (Mémoires cités au Chap. VII, p. 197).

autres points, et nous avons vu au n° 2, que l'on a

$$r = d(2m - 10) - \theta - 6t,$$

r étant le rang de C. On en déduit

$$\theta = d(2m - 10) - r - 6t.$$

Or, la courbe Γ est de degré

$$(m-4)^2 - d;$$

elle coupe donc la surface f en un nombre de points égal à

$$m[(m-4)^2 - d];$$

mais, parmi ces points, il y en a, sur C, qui représentent un nombre de points d'intersection égal à

$$2\theta + 3t,$$

et, par suite,

$$p^{(2)} = m[(m-4)^2 - d] - 2\theta - 3t.$$

En réduisant et substituant au rang r le genre p de la courbe gauche, on trouve

$$p^{(2)} = m(m-4)^2 - (5m - 24)d + 2p + 9t - 4,$$

et l'on a, pour le second genre $p^{(1)}$ de la courbe,

$$p^{(1)} = m(m-4)^2 - (5m - 24)d + 2p + 9t - 3.$$

Il peut arriver ici quelque chose d'analogue à ce qui s'est présenté pour la formule donnant p_g; alors même qu'il n'y a pas d'adjointe d'ordre $m - 4$ ($p_g = 0$) et, par suite, quand le second genre $p^{(1)}$, tel que nous l'avons défini, n'a aucune signification, la formule précédente n'en continue pas moins à donner un nombre déterminé positif ou négatif. Il y a donc encore lieu d'introduire, à côté du second genre (*Curvengeschlecht*), un autre nombre qu'on peut appeler le second genre *numérique,* mais nous n'insistons pas, pour le moment, sur ces notions que nous devrons plus tard approfondir. Ce qui précède suffit pour montrer quelles surprises réserve la théorie des surfaces algébriques; en particulier, la distinction qu'il peut y avoir lieu de faire, comme nous l'avons

montré sur des exemples, entre le genre *géométrique* et le genre *numérique* d'une surface, distinction qui n'a pas d'analogue dans la théorie des courbes planes, montre sous un nouveau point de vue la différence profonde qui existe entre le cas de deux variables et celui d'une variable, différence que nous avions déjà rencontrée dans le domaine de la Géométrie de situation et dans l'étude des intégrales de différentielles totales.

FIN DU TOME PREMIER.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE V.

SUR LES INTÉGRALES DE DIFFÉRENTIELLES TOTALES DE PREMIÈRE ESPÈCE.

CHAPITRE VI.

DES INTÉGRALES DE DIFFÉRENTIELLES TOTALES DE SECONDE ESPÈCE ET DE TROISIÈME ESPÈCE.

CHAPITRE VII.

DES INTÉGRALES DOUBLES DE PREMIÈRE ESPÈCE ET DES INVARIANTS QUI S'Y RAPPORTENT.

CHAPITRE VIII.

SUR LES COURBES GAUCHES ALGÉBRIQUES ET LA FORMULE SUSCEPTIBLE DE DONNER LE GENRE D'UNE SURFACE.

FIN DE LA TABLE DU TOME PREMIER.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
24433 Quai des Grands-Augustins, 55.

